ESERCIZIO

DI

GONIOMETRIA

E

DI TRIGONOMETRIA SFERICA

DETTATO

AI SUOI ASSISTENTI ED AGLI ALLIEVI

DAL

CAV. NICCOLÒ CACCIATORE

Direttore del Reale Osservatorio

Palermo

STAMPERIA DI FRANCESCO LAO

Tipografo del Reale Osservatorio

1837

Prezzo tt. 12 — delle sole tavole tt. 5.

A SUA ECCELLENZA

SIG. CAVALIERE

D.r D. Antonino Franco

CAVALIERE, GRAN CROCE DEL R. ORDINE DI FRANCESCO I.°
MINISTRO SEGRETARIO DI STATO PER GLI AFFARI
DI SICILIA.

Non qual tenue segno della mia particolare gratitudine, ma in nome dell'Astronomia rendo in questo libro un pubblico omaggio di riconoscenza al dotto e giusto Ministro, che tanto bene seconda le alte vedute del saggio e benefico Sovrano che la protegge. Servendo così alla giustizia ed alla verità non meriterommi la taccia d'ingrato. Un gran Re tra le moltiplici ed estese occupazioni del regno concepisce, vede, vuole il bene il grande l' utile pubblico ne' suoi dominj, lo accenna, lo progetta : il Ministro, che ha talenti dottrina e lealtà, sa proporre i mezzi, sa scegliere i soggetti, sa regolare con fermezza

a fronte degli ostacoli l'esecuzione della volontà Sovrana. Così il grande Errico IV volle riparare a trent' anni di antiche desolazioni, e il suo fedele Ministro Sully regolò l' amministrazione e le spese, e potè pagare dugento milioni di debiti. Volle Errico le manifatture di sete e di cristalli, Sully regolò i mezzi, e la Francia ebbe le manifatture. Errico volle navigare dalla Senna nella Loire : Sully seppe scegliere gl'ingegnieri, e il Canale di Briare fu presto costruito. Ordinò il gran Luigi XIV di avvivare il commercio interno, e il saggio Colbert con istituire la Sopraintendenza di Ponti ed Argini risuscitò l' arte di costruire le pubbliche vie, già perduta dopo i Romani. Vuole Luigi l'esecuzione di una grande Meridiana per regolare la gran Carta del Regno, e il Catasto che ne dipende; Colbert chiama il famoso Cassini dall'Italia e gli erigge l'Osservatorio, dal quale l'astronomo dà principio al gran lavoro. Luigi pensa di emancipare dal passaggio dello stretto il commercio tra le coste dell'Oceano e del Mediterraneo : Colbert sa scegliere il matematico Riquet, e un canale degno della grandezza Romana unisce ora i due mari. La

Biblioteca Reale, l'Ospedale degl'Invalidi, le due Accademie delle Scienze, e delle Iscrizioni furono concepite dal Re; e il Ministro scegliendo li soggetti più abili all' esecuzione proccurò la gloria al suo Signore di rendere quei stabilimenti utili e famosi sin dal loro nascere. Il glorioso Ferdinando I° vuole un'Osservatorio in Palermo, Caramanico propone il P. Piazzi, li di cui lavori divorano i secoli, e dopo pochi anni a caratteri di stelle imprime in cielo il nome dell'Augusto fondatore. Ferdinando vuole riformare le vecchie antiche leggi, e stabilire un codice : Tommasi lo compila, lo discute col Monarca di passo in passo, e il Monarca, nuovo Giustiniano, ha la gloria di essere salutato Legislatore dei suoi popoli. In tal guisa la storia de' progressi dello spirito umano, la quale nei suoi fasti trasmette ai secoli avvenire con gratitudine ed ammirazione li nomi e le azioni dei Sovrani benefattori della umanità, e protettori delle scienze e delle arti, consegna pure alla riconoscenza de' posteri li grandi Ministri, che coi loro talenti travagli lumi e rettitudine rendono glorioso il governo del loro Monarca.

La modestia di V. E. non mi permette che io con questo passo prosiegua ad accennare ancora le cose nostre. Ma inutile resta il mio silenzio; perchè sono note all'Europa tutta, sono state registrate negli atti delle più illustri Accademie le passate vicende di quest'Osservatorio, la protezione ferma e rischiarata dal saggio Ferdinando II sin dal suo avvenimento al trono spiegata per l'Astronomia Siciliana, e il giusto impegno del suo illuminato Ministro degli affari di Sicilia per conservarla nel primiero onore.

Accetti quindi l'E. V. con benigno animo questo tributo di gratitudine che le offro in nome della scienza astronomica, mentre con profondo rispetto ho l'onore di soscrivermi

Di V. E.

Palermo 21 Marzo 1837

Dev^{mo} obl^{mo} oss^{mo} servo
Niccolò Cacciatore

DISCORSO PRELIMINARE

Quest'esercizio su le formole fondamentali della Goniometria e della Trigonometria Sferica è quello stesso che ho dettato finora manoscritto agli assistenti, ed agli alunni; onde, dopo le prime e generali nozioni del cielo, prepararli al posteriore apprendimento dell'Astronomia teorica e pratica. Sono stato obbligato a premetterlo alle lezioni astronomiche a cagione del sistema da moltissimi anni adottato in questa Università degli studj; nella quale, trovandosi il corso delle matematiche pure dettato in tre sole cattedre da dotti e valenti professori, dal piano di quei corsi scolastici, nei quali non si possano oltrepassare le prime nozioni del calcolo differenziale, si ha dovuto sinanche escludere la Trigonometria Sferica. E non vi ha chi non sappia, che quest' importantissimo ramo delle matematiche è di prima necessità per chi vuole inoltrarsi nella Geometria di Sito, nelle teorie superiori architettoniche, nella dottrina delle proje-

zioni, e de' solidi di rivoluzione, e sino nell'ottica, e nelle stesse sezioni coniche; oltre che costituisce il linguaggio quasi esclusivo dell'Astronomia, della Navigazione, della Geografia matematica, della Gnomonica, e della alta Geodesia; e sommamente influisce in altri rami delle matematiche applicate agli usi della Società.

Scritto in varie volte, senza un piano legato, ma in ogni triennio variato secondo le circostanze, non mi sarei mosso a lasciarlo pubblicare senza la forte reiterata insistenza degli assistenti e degli alunni, ai quali l'uso de' manoscritti è cagione di non lieve perdita di tempo, e di equivoci e di errori molestissimi. Che anzi, sia detto in loro onore, oppresso da fiera malattia che obbligommi per tre mesi a guardare il letto, mentre mi era inibito di applicarmi in qualunque modo, essi, onde non venirne sospesa la stampa, con tutto zelo vollero incaricarsi della revisione e correzione della medesima.

Non avendo altro scopo che quello di mettere li discenti nella posizione di seguire il corso intiero delle lezioni di Astronomia, e di servirsi con vantaggio degli autori di questa scienza, ho dovuto adattarmi ai studj da loro già fatti; ed ho preferito il metodo di andar riunendo, e di far capire con chiarezza la costruzione, ed il maneggio delle formole trigonometriche di maggior uso. E senza pretensione di scrivere trattati completi o nuovi su

di una materia pienamente discussa dagli antichi e dai moderni, e nella quale non resta al più che la scelta della disposizione più appropiata all'oggetto che uom si propone, sonomi maggiormente esteso in ciò che influisce a fare acquistare la preziosa abitudine di crearsi da se le formole che bisognano, e di recare alla maggiore semplicità quell'espressioni, che le vicende del calcolo generano spesso un po complicate sotto il gioco delle trasformazioni: come all'incontro rapidamente ho accennato quelle dottrine, le quali, dopo l'esercizio precedente, facilmente si potranno apprendere su qualunque autore.

Per commodo degli assistenti e degli alunni medesimi, e di accordo coi regolari e diurni lavori di questo Reale Osservatorio, ho stimato di riunire in fine le Tavole più indispensabili al calcolo delle osservazioni del Sole e delle stelle, le quali il calcolatore con non poca noja e con perdita di tempo dovrebbe andar cercando qua e là disperse in varie opere, e che non sempre trova pronte al bisogno. Sono esse precedute dalle tavole sinottiche dei valori delle funzioni circolari, e delle soluzioni dei triangoli, che meglio facilitano ed abbreviano la pratica de' calcoli.

INDICE

	Costanti di uso frequente.		*Logaritmo*
1	360° in secondi	= 1296000″	6.1126050
2	Raggio in secondi di arco $= r'' = \frac{1}{\text{sen}''}$.	= 206264″,806	5.3144251
3	Raggio in minuti $= r' = \frac{1}{\text{sen } 1'}$ . .	= 3437′,74677	3.5362739
4	Raggio in gradi $= r^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$ . .	= 57°,295780	1.7581226
5	Lunghezza dell'arco di 1″ = sen 1″.	= 0,0000004848	4.6855749
	di 2″ = sen 2″.	= 0,0000009696	4.9866049
	di 3″ = sen 3″.	= 0,0000014544	5.1626961
6	Lunghezza dell'arco di 1′ = sen 1′.	= 0,0002908883	6.4637261
7	Lunghezza dell'arco di 1°. . . .	= 0,0174532930	8.2418774
8	seno 1°	= 0,017452406	8.2418553
9	Diametro = 1. Circonferenza $= \pi$.	= 3,1415927	0.4971499
10	Diam. = 1. Area del circolo $= \frac{\pi}{4}$.	= 0,7853982	9.8950899
11	Diam. = 1. Superfic. della sfera $= \pi$.	= 3,1415927	0.4971499
12	Diam. = 1. Solidità della sfera $= \frac{\pi}{6}$.	= 0,5235988	9.7189986
13	Diam. = 2 r. Circonferenza = 2 $r\pi$.	$= r \times$ 6,28318[illegible]	0.7981799 + l r.
14	Diam = 2r. Area del circolo $= r^2 \pi$.	$= r^2 \times$ 3,1415927	0.4971499 + 2 l r.
15	Diam. = 2r. Superf. della sfera $= 4 r^2 \pi$.	$= r^2 \times$ 12,5663708	1.0992099 + 2 l r.
16	Diam. = 2r. Solid. della sfera $= \frac{4}{3} r^3 \pi$.	$= r^3 \times$ 4,1887903	0.6220886 + 3 l r.
17	24^h espresse in secondi	= 86400″	5.9365137
18	Accelerazione diurna delle stelle in secondi di tempo medio . . .	= 235″,9093	2.3727451
19	Giorno Sidereo = 23^h 56′.4,0906 di tempo medio solare.	= 0,9972697	9.9988126
20	Giorno Medio = 24^h 3′.56″,5554 di tempo sidereo.	= 1,0027379	0.0011874
21	Rivoluzione Siderea della Terra in giorni medj solari	= 365,25636	2.5625978
22	Rivoluzione Tropica della Terra in giorni medj solari	= 365,24224	2.5625810
23	Numero e, il di cui log. iperbolico = 1.	= 2,71828183	0.4342945
24	Modulo dei log. tabulari	= 0,43429448	9.6377843
25	Modulo per convertire li log. tabulari in iperbolici.	= 2,30258509	0.3622149

Paragrafo	Linea	ERRATA	CORRIGE
Goniometria			
34	7	$r.$ sen a	sen a
35	3	Se $n = 30°$	Se $a = 30°$
Prima del § 48 si metta per titolo....		*Rapporti delle funzioni delle somme e differenze di due archi.*	
49	7	perpendicolare AD	perpendicolare CD
50	13	$-r.\cos C'A'C' \text{ sen } B'$	$-r.\cos C'A'D' \text{ sen } B'$
85	denomin.	$1 - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a$	$1 - 2 \text{ sen}^2 \frac{1}{2} a$
134	13	$\tan \frac{1}{2} (180 - (a+b))$	$\tan (180 - \frac{1}{2} (a+b))$
159	....	$\frac{\text{sen } (a+b)}{\text{sen } (a-b)}$	$\frac{\text{sen } (a-b)}{\text{sen } (a+b)}$
190 191	In fine della pag. 32.	*Devono precedere li rispettivi* § 190 e 191.	
233 234	....	*Invece del segno* ∽ *si è posto per errore in molti luoghi* ∞.	
244	denomin.	$\tan^2 (44 + \frac{1}{2} b) + 1$	$\tan^2 (45 + \frac{1}{2} b) + 1$
Trigonometria			
7	7	cosi verticale	così verticale
69	3 for.sis.6	$-\cos A \cos C$	$-\cos A \cos B$
86	3	Il dato adjacente	Il lato adjacente
90	11	se cerchi	se si cerchi
120	4	$\frac{\cos b}{\text{sen } c \cot c} = 1$	$\frac{\cos c}{\text{sen } c \cot c} = 1$
139	9	e non avvertità	e già avvertita
158		metrdo	metodo
169	6 denomin.	$\cos \frac{1}{2} (B+C)$	$\cos \frac{1}{2} (B-C)$
175	6	$= \frac{\cot c}{\cos b}$	$= \frac{\cot C}{\cos b}$
fol.144	11	$= 2 \text{ sen } \frac{1}{2} a \cos \left(\frac{a+b}{2}\right)$	$= 2 \text{ sen } \frac{1}{2} a \cos \left(\frac{b+c}{2}\right)$
§. 207	11	$\text{sen } \frac{1}{2} s =$	$\text{sen } s =$

GONIOMETRIA

1. Abbiamo dalla Geometria che fatto centro nel vertice di un' angolo rettilineo qualunque, e descritti quanti circoli concentrici si voglia, li lati dell'angolo diventeranno de' raggi, la di cui inclinazione sarà misurata dall'arco da essi intercetto. E perchè tutti li cerchj sono simili, gli archi intercetti dai lati dell'angolo saranno parti simili dei cerchj a cui appartengono; e conterranno uno stesso numero di gradi. Onde un'angolo e il suo arco corrispondente che lo misura, si indicano collo stesso numero di gradi, qualunque sia il raggio del circolo. Sapendosi altronde che il grado non è quantità assoluta come il palmo, il miglio; ma $\frac{1}{360}$ della circonferenza, qualunque ne sia la grandezza, la quale dipende dal raggio col quale è stata descritta.

2. La grandezza numerica di un'angolo essendo la stessa dell'arco che lo misura, si nominano l'uno per l'altro indifferentemente. Ma l'angolo formato da due rette appartiene ai triangoli formati da linee rette, e l'arco alli triangoli formati da archi di cerchio, perciò li rapporti che troveremo tra i primi, saranno comuni coi secondi.

3. Se si raddoppia l'angolo, l' arco che lo misura

sarà doppio: e se si congiungano con una corda le estremità di quest'arco doppio la corda sarà più grande quanto sarà più vicina al centro, e sarà massima quando sarà diametro. In questo ultimo caso, li lati dell'angolo distesi in unica retta si confonderanno, e formeranno colla corda un diametro: l'angolo doppio, siccome è chiaro, sparirà, o sia sarà misurato da un'arco di 180°: e l'angolo primitivo, che ne è la metà, sarà di 90° cioè retto.

4. Al triangolo si può sempre circoscrivere un circolo, e in questo modo li suoi angoli divengono iscritti, e avranno per misura la metà dell'arco, sotteso dal lato opposto, il quale in tal guisa diventa corda di una porzione del circolo circoscritto. Così circoscritto il circolo (*fig. 1*) al triangolo ABC, l'angolo A avrà per misura la metà dell'arco BC, la di cui corda è il lato BC opposto all'angolo A. Lo stesso si dica degli altri due angoli; ciascuno de' quali avrà sempre per misura la metà dell'arco che ha per corda il lato opposto. Sia O il centro del cerchio circoscritto, l'angolo $C = \frac{1}{2} BOA = BOA'$ avrà per misura l'arco $BM = \frac{1}{2} BMA$.

5. Infiniti triangoli come $A'B'C'$ simili al dato ABC per mezzo di lati paralleli si possono formare, che abbiano a quello uguali gli angoli corrispondenti: e possono egualmente venire inscritti in cerchj concentrici al primo. Li loro lati sottenderanno archi simili delle rispettive circonferenze, le quali perciò conterranno un egual numero di gradi. Saranno dunque i lati dei triangoli simili in rapporto costante coi raggi dei cerchj nei quali sono iscritti. E perciò sarà AB ad $A'B'$ come $AO : A'O$; come $BO : B'O$. E tutte le altre parti omologhe conserveranno un rapporto costante col rispettivo raggio e tra di loro. E sarà BO a BA' come $B'O : B'A'' \ldots BM : OM :: B'M'$:

OM' : anche $BA' : OA' :: B'A''' : OA''$ e così di seguito.

6. Essendo il triangolo la più semplice delle superficie; e degli elementi geometrici de' solidi, perchè tutte in triangoli si risolvono, la soluzione de' triangoli interessa tutta la scienza matematica. Composto il triangolo di tre angoli e di tre lati, li primi elementi sono eterogenei agli altri tre; nè può aver luogo la sua risoluzione se non si riducono tutti omogenei. Ora rappresentandone li tre angoli per mezzo di linee rette, e resi così li lati del triangolo *coordinate* del raggio, mentre contemporaneamente sono corde degli archi che misurano gli angoli, si sono resi gli angoli comparabili coi lati, e per mezzo della iscrizione nel circolo si sono messi in rapporto col raggio del medesimo.

7. Sia (*fig.* 2) l'angolo MCB lo stesso che MOB della figura precedente; si supponga per ora minore di 90°, e si tiri il cerchio $MD\ M'B''$; si abbassi la perpendicolare BA dall'estremità di uno dei suoi lati CB preso per raggio sull'altro lato CM. Sull'estremità M del lato CM preso per raggio si alzi la normale MT sino all'incontro del primo prolungato. Si hanno due triangoli rettangoli simili ACB e MCT, nei quali rispetto all'arco BM o all'angolo ACB si sono chiamati BA *seno*, MT *tangente*, CT *secante*; MA porzione del raggio, che misura la distanza tra il seno e la tangente, si chiamò *seno verso*; e in architettura vien detta *freccia* o *saetta*.

8. Essendo MD un quadrante, cioè essendo l'angolo ACD retto, è chiaro che l'arco che lo misura sarà di 90°: il di cui seno sarà il raggio stesso CD, onde il seno di 90° è uguale al raggio. Ora nel quadrante MD, l'arco DB, considerato da se solo, è complemento dell'arco BM, cioè $BD = (90 - BM)$. Costruite

le stesse coordinate rispetto a quest'arco, sarà BN il *seno*, DF la *tangente*, CF la *secante*, ND il *seno verso* dell'arco DB, o sia dell'arco di $(90—BM)$.

9. E poichè il valore dell'arco BD è dipendente da quello dell'arco BM perchè ne è *complemento*, si è chiamato BN *coseno*, DF *cotangente*, CF *cosecante*, ed ND *coseno verso* dell'arco primitivo BM.

10. Quindi è chiaro, che *seno*, *tangente*, *secante*, *seno verso* di un' arco, li quali con nome generale si chiamano sue *funzioni*, sono rispettivamente *coseno*, *cotangente*, *cosecante*, *coseno verso* del complemento dell'arco medesimo, e viceversa. Quest'ultime si chiamano da taluni *co-funzioni*. Le prime relativamente agli angoli del triangolo si chiamano *rette angolari dirette*, e le seconde *rette angolari indirette*.

La determinazione dei rapporti di queste linee col raggio del cerchio, al quale appartengono, forma l'oggetto della Goniometria : e la loro applicazione alla risoluzione dei triangoli in numeri semi-determinati forma l'oggetto della Trigonometria.

11. Il seno quindi non è che la metà della corda dell'arco doppio, cioè non è che la metà del lato del triangolo iscritto; il coseno è la parte del raggio intercetta tra il centro e il piede del seno. Il seno verso è la differenza tra il raggio e il coseno.

12. Esprimendo con a un'arco BM, o l'angolo corrispondente ACB, saranno

raggio	$= CM = CB = CD = r$
seno	$= BA = \text{sen}\, a$
coseno	$= BN = CA = \cos a = \text{sen}(90—a)$
tangente	$= MT = \tan a$
cotangente	$= DF = \cot a = \tan(90—a)$
secante	$= CT = \sec a$
cosecante	$= CF = \text{cosec}\, a = \sec(90—a)$
seno verso	$= MA = \text{sen v.}\, a$
coseno verso	$= DN = \cos \text{v.}\, a = \text{sen v.}(90—a)$

13. Giova qui avvertire che dovendo alzare alla potenza n^{ma} queste funzioni, si indica la potenza sulla funzione e non sull'arco: per es. $sen^2 a$, $sen^3 a$, $cos^4 a$, $tan^5 a$ indicano le potenze delle funzioni, e non dell'arco a. Adopereremo ancora li seguenti segni

$a > b$ ... quando a è maggiore di b

$a < b$ ... quando a è minore di b

$a \backsim b$ ... quando si vuole la differenza positiva tra a e b qualunque di esse sia la maggiore.

14. Per mezzo dei *seni* si conosce la grandezza relativa dei lati del triangolo, perchè in esso [11] la metà di un lato essendo seno dell'angolo opposto, la ragione de' lati sarà anche quella dei seni degli angoli opposti. Nel triangolo BAC (*fig.* 1) sarà sempre vero che il lato BC sta al lato BA come il seno dell'angolo A opposto al primo al seno dell' angolo C opposto all'altro. E similmente il lato BC sta al lato AC come il seno dell'angolo A al seno dell'angolo B. Onde nei triangoli rettilinei li lati stanno l'uno all'altro come li seni degli angoli rispettivamenti opposti. Proposizione fondamentale della Trigonometria rettilinea. E quindi $BC : AC : AB :: \text{sen } A : \text{sen } B : \text{sen } C$. Onde essendo costante il rapporlo di $2 : 1$ del lato al seno dell'angolo opposto, si avrà sempre

$$\frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} = \frac{AC}{BC} \cdots \frac{\text{sen } C}{\text{sen } A} = \frac{AB}{BC} \cdots \frac{\text{sen } C}{\text{sen } B} = \frac{AB}{AC}.$$

15. Se il triangolo BAC è rettangolo in A; iscritto nel circolo come BAC'', e bipartiti i lati per mezzo dei raggi perpendicolari, diverrà $BA''O$: esso nella fig. 2, è rappresentato dal triangolo BAC, nel quale l'ipotenusa BC è il raggio stesso del cerchio, il seno dell'angolo C è il cateto opposto BA, e il seno dell'angolo B è l'altro cateto. Ma nei triangoli rettangoli uno degli angoli obbliqui è complemento dell'altro; e il seno

dell'angolo retto è uguale al raggio [8]; perciò sarà $BC : AC : A :: r : \text{sen } B : \text{sen } C :: r : \text{sen } B : \cos B :: r : \cos C : \text{sen } C$, e quindi

16. $\frac{\text{sen } B}{r} = \frac{AC}{\text{Ipotenusa}} = \frac{\cos C}{r}$.

17. $\frac{\text{sen } C}{r} = \frac{AB}{\text{Ipotenusa}} = \frac{\cos B}{r}$.

18. $\frac{\text{sen } C}{\text{sen } B} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{sen } C}{\cos C} = \tan C = \frac{\text{lato opposto}}{\text{lato adjacente}} = \cot B$ [10].

19. Onde nel triangolo rettangolo, per causa del seno dell'angolo retto uguale al raggio, si ha

1° Che il raggio sta al seno di un'angolo obbliquo come l'ipotenusa al cateto opposto all'angolo.

2° Che il raggio sta alla tangente di un'angolo come il cateto adjacente all'angolo sta al cateto opposto.

Primi rapporti tra le funzioni di un'arco.

20. Dai triangoli rettangoli simili CAB, CMT, CDF, CNB (*fig.* 2.) si ha

1° $\overline{CB}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 = r^2 = \text{sen}^2 a + \cos^2 a$.

2° $\overline{CT}^2 = \overline{TM}^2 + \overline{CM}^2 = \sec^2 a = \tan^2 a + r^2$.

3° $\overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{FD}^2 = \text{cosec}^2 a = r^2 + \cot^2 a$.

4° $CA : BA :: CM : TM$ e quindi

$$\cos a : \text{sen } a :: r : \tan a = \frac{r \text{ sen } a}{\cos a}.$$

5° $CA : CB :: CM : CT$ e quindi

$$\cos a : r :: r : \sec a = \frac{r^2}{\cos a}.$$

6° $BA : BC :: CD : CF$ e quindi

$$\text{sen } a : r :: r : \text{cosec } a = \frac{r^2}{\text{sen } a}.$$

7° $MT : MC :: CD : DF$ e quindi

$$\tan a : r :: r : \cot a = \frac{r^2}{\tan a}.$$

8° $BA : CA :: CD : FD$ e quindi

$$\text{sen } a : \cos a :: r : \cot a = \frac{r \cos a}{\text{sen } a}.$$

21. Essendo tutti questi rapporti col raggio r, per maggiore semplicità si suppone $r = 1$, e in questa guisa si avranno li rapporti delle linee trigonometriche coll'unità. Onde poi verrà facile, occorrendo, calcolarne il valore assoluto con moltiplicarle per il valore assoluto del raggio. Supposto il raggio $= 1$ le precedenti espressioni, trattando ciascuna quantità successivamente come incognita, daranno

22. $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, onde $\text{sen } a = \sqrt{(1 - \cos^2 a)}$... $\cos a = \sqrt{(1 - \text{sen}^2 a)}$.

23. $\sec^2 a = 1 + \tan^2 a$, onde $\sec a = \sqrt{(1 + \tan^2 a)}$... $\tan a = \sqrt{(\sec^2 a - 1)}$.

24. $\text{cosec}^2 a = 1 + \cot^2 a$...$\text{cosec } a = \sqrt{(1 + \cot^2 a)}$... $\cot a = \sqrt{(\text{cosec}^2 a - 1)}$.

25. $\tan a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$...$\text{sen } a = \cos a \tan a$...$\cos a = \frac{\text{sen } a}{\tan a}$.

26. $\sec a = \frac{1}{\cos a} = \sqrt{(1 + \tan^2 a)}$ [23] onde

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tan^2 a)}}.$$

27. $\text{cosec } a = \frac{1}{\text{sen } a} = \sqrt{(1 + \cot^2 a)}$ [24] onde

$$\text{sen } a = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cot^2 a)}}.$$

28. Dividendo la 26 per la 27 si ha $\frac{\sec a}{\text{cosec } a} = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$

$= \tan a$, onde $\sec a = \tan a \operatorname{cosec} a \ldots \operatorname{cosec} a = \frac{\sec a}{\tan a}$.

29. $\cot a = \frac{1}{\tan a} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$ [20.8°]...$\tan a = \frac{1}{\cot a} \ldots$

$\operatorname{sen} a = \frac{\cos a}{\cot a} \ldots \cos a = \operatorname{sen} a \cot a$.

30. Essendo $\cos a = \frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 a)}}$ [26], sostituendo per $\tan^2 a$ il suo valore $\frac{1}{\cot^2 a}$ [29] sarà $\cos a =$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\cot^2 a}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cot^2 a+1}{\cot^2 a}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{\cot a}\sqrt{(\cot^2 a+1)}} =$$

$$\frac{1}{\tan a \sqrt{(\cot^2 a+1)}} = \frac{1}{\tan a} \times \frac{1}{\sqrt{(\cot^2 a+1)}} = \frac{\cot a}{\sqrt{(1+\cot^2 a)}}.$$

31. $\operatorname{sen} a = \frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2 a)}}$ [27]; ma $\cot^2 a = \frac{1}{\tan^2 a}$ [29] si avrà $\operatorname{sen} a = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\tan^2 a}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\tan^2 a}{\tan^2 a}\right)}}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan a}\sqrt{(1+\tan^2 a)}} = \frac{\tan a}{\sqrt{(1+\tan^2 a)}} = \frac{1}{\cot a \sqrt{(1+\tan^2 a)}}.$$

32. $\tan a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$ [25] $= \frac{\sqrt{(1-\cos^2 a)}}{\cos a}$ [22]

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2 a)}} \text{ [22]} = \frac{\sqrt{(1-\cos^2 a)}}{\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2 a)}} \text{ [22]}.$$

33. $\cot a = \frac{1}{\tan a} = \frac{\cos a}{\sqrt{(1-\cos^2 a)}} = \frac{\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2 a)}}{\operatorname{sen} a}$

$$= \sqrt{\left(\frac{1-\operatorname{sen}^2 a}{1-\cos^2 a}\right)}$$

e quivi si vede che per avere li valori della cotan-

gente basta rovesciare quelli della tangente. Le analogie finora trovate somministrano li rapporti più semplici delle funzioni tra di loro e col raggio; ed è necessario tenerle sempre presenti per le sostituzioni continue che di esse si fanno nei calcoli.

34. Sarà facile introdurre nuovamente il raggio r nelle precedenti espressioni, purchè si elevi esso a quella potenza che si richiede per rendere omogenei i termini dell'equazione, con ridurli ciascuno ad avere le stesse dimensioni: per es. nella espressione $\tan a = \frac{1}{\cot a}$ si dovrà fare $\tan a = \frac{r^2}{\cot a}$ perchè $\tan a \cot a$ è di due dimensioni. Sia r sen $a = \cos a \tan a$; qui $\cos a \tan a$ essendo di due dimensioni, per avere due dimensioni nel primo membro bisognerà moltiplicare sen a per r. E generalmente, sia l'equazione

$$8 \cos^4 a = 8 \cos^2 a - \cos 4a + 1$$

per introdurre r in modo da rendere omogenei tutti i termini bisognerà elevarlo in ciascun termine a tale potenza, che il suo prodotto colle variabili, o colle altre funzioni dasse le dimensioni medesime. Ciò si ottiene scrivendoli come siegue

$$8 \cos^4 a = 8 r^2 \cos^2 a - r^3 \cos 4a + r^4$$

se r non fosse stato fatto uguale all'unità si avrebbe trovata originalmente la seconda e non la prima equazione. Li coefficienti non alterano le dimensioni.

35. Intanto è facile riflettere a certi valori determinati delle funzioni dell'arco a. Difatti

1° Se $n = 30°$ il suo seno, perchè esso è metà della corda dell'arco doppio [10] sarà metà della corda di 60.° Ma la corda di $60° = r = 1$ dunque sen $30° = \frac{1}{2} \ldots \cos 30° = [15]\ \sqrt{(1-\frac{1}{4})} = \sqrt{(\frac{3}{4})} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$$\tan 30° = \frac{\text{sen } 30}{\cos 30} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots \cot 30 = \sqrt{3}.$$

2° Se $a = 60°$, le sue funzioni saranno le stesse che le cofunzioni di 30° suo complemento, e viceversa [11].

3° Se $a = 45°$... sarà sen $45 = \cos(90-45) = \cos$ del suo complemento [11]. Onde sen $45 = \cos 45$... e $\text{sen}^2 45 + \cos^2 45 = 1 = 2\,\text{sen}^2\,45$ [15] e quindi

$$\text{sen}\,45 = \sqrt{(\tfrac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots \tan 45 = \frac{\text{sen}\,45}{\text{sen}\,45} = 1.$$

36. Poichè $\tan 0° = 0$; $\tan 30 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$; $\tan 45 = 1$; $\tan 60 = \sqrt{3}$; $\tan 90 = \infty$ è facile inferirne l'immensa sproporzione che vi ha tra l'incremento degli archi, e quello delle loro tangenti. La stessa osservazione facendo sull'andamento delle altre funzioni si conoscerà, che le funzioni circolari non crescono proporzionalmente agli archi.

37. Abbiamo finora supposto $a < 90$, e abbiamo veduto che sen $a = \cos(90-a)$, cioè che le funzioni di un' arco sono cofunzioni del complemento, e viceversa. Ma in astronomia si fa uso del cerchio intiero, e gli archi sono considerati da o gradi sino a 360 gradi, cioè per tutti li quattro quadranti. Bisognerà quindi esaminare il valore di sen a per tutti li passaggi dell'arco a. Il valore dell'altre funzioni dipenderà da quello di seno a.

38. Se l'angolo è ottuso come MCB'; ne sarà il suo eccesso DCB' sull'angolo retto il *complemento*; e la sua differenza $B'CM'$ con due retti ne sarà il *supplemento*. E secondo le definizioni delle funzioni ne saranno $B'A'$ il seno, $A'C$ il coseno, $T'M'$ la tangente, CT' la secante: le quali saranno numericamente uguali alle funzioni dell'angolo ACB, ove il supplemento dell'angolo ottuso ACB' gli sia uguale. Onde il seno di un'angolo maggiore di 90° è uguale al seno del suo supplemento a 180°; ed uguale al coseno del suo complemento, o del suo eccesso sopra 90°.

39. Onde ne siegue che nel secondo quadrante si riproducono le stesse funzioni angolari del primo. Che il seno il quale è o nel punto M, va crescendo col crescere dell'arco a, ma non proporzionatamente al medesimo.

40. Che giunto l'arco a 90 il suo seno si confonde col raggio CD al quale è uguale, e indi in poi decresce come decresce il *supplemento* dell'angolo ottuso sino che a 180° ritorna ad essere $= o$.

41. Dopo 180°, nel terzo quadrante, il seno trovasi in direzione opposta a quelli del primo e secondo quadrante, e sempre cresce sino a 270, dove è uguale al raggio. Indi in poi ricomincia a decrescere, sino a che compita l'intiera circonferenza ritorna uguale a zero.

42. Da ciò si vede che il *seno*, e perciò tutte le altre funzioni [29] dell' arco a ritornano ad avere li stessi valori numerici nei quattro quadranti, perchè sen a = sen $(180 - a)$ = sen $(180 + a)$ = (sen $360 - a$).

43. Non si distinguerebbe quindi a quale dei quattro archi differenti appartiene una funzione, se non si ricorre all'equazione generale della curva. Di fatti si sa che BA è media proporzionale tra MA ed AM'; onde sarà $\text{sen}^2 a = (r + \cos a)(r - \cos a) = r^2 - \cos^2 a$, che è l'equazione al circolo, nella quale in geometria sen a corrisponde coll'ordinata y, e cos a coll'ascissa x computata dal centro. Sarà perciò

$$\text{sen } a = \pm \sqrt{(r^2 - \cos^2 a)} = y = \pm \sqrt{(r^2 - x^2)}.$$

44. Descrivendo il circolo per mezzo di questa equazione si vedrà che in esso *sen* a ha due valori uguali uno positivo e l'altro negativo, cioè in direzione opposta, ma sempre perpendicolari all'asse o diametro. Se nella parte superiore del luogo geometrico si considerano essi positivi, saranno negativi nella parte infe-

riore. Ma li coseni contandosi dal centro divengono nulli nel centro medesimo, e crescono in direzione opposta dall' altra parte del centro; onde se nel primo caso, cioè sulla destra, sono positivi riescono negativi nel secondo o sulla sinistra. Così si forma la seconda parte del circolo, in cui li coseni passano dal valor *o* al massimo che uguaglia il raggio, e ritornano al valor *o*. E quivi notando che sen $a = \pm o$ quando cos $a = r$ e che sen $a = \pm r$ quando cos $a = o$; si descriva il circolo intiero per mezzo dei valori successivi di *sen a*. Da questi finalmente per mezzo delle espressioni del cos. tan. cot. sec. é cosec si avrà la seguente tavola: nella quale il valore relativo di ogni linea trigonometrica si conoscerà secondo il luogo che l'arco corrispondente occupa nel quadrante a cui appartiene. In essa *q* indica un quadrante, ed *n* un numero intiero.

45. VALORI DELLE FUNZIONI CIRCOLARI RELATIVAMENTE ALL'ARCO a NEI QUATTRO QUADRANTI DEL CERCHIO

VALORE DELL'ARCO a		sen a	cos a	tan a	cot a	sec a	cosec a
0	0°	0	1	0	∞	1	∞
a	a	$+$sen a	$+$cos a	$+$tan a	$+$cot a	$+$sec a	$+$cosec a
$q-a$	$90^\circ-a$	$+$cos a	$+$sen a	$+$cot a	$+$tan a	$+$cosec a	$+$sec a
q	90°	1	0	∞	0	∞	1
$q+a$	$90+a$	$+$cos a	$-$sen a	$-$cot a	$-$tan a	$-$cosec a	$+$sec a
$2q-a$	$180-a$	$+$sen a	$-$cos a	$-$tan a	$-$cot a	$-$sec a	$+$cosec a
$2q$	180°	0	-1	0	0	-1	∞
$2q+a$	$180+a$	$-$sen a	$-$cos a	$+$tan a	$+$cot a	$-$sec a	$-$cosec a
$3q-a$	$270-a$	$-$cos a	$-$sen a	$+$cot a	$+$tan a	$-$cosec a	$-$sec a
$3q$	270°	-1	0	∞	0	∞	-1
$3q+a$	$270+a$	$-$cos a	$+$sen a	$-$cot a	$-$tan a	$+$cosec a	$-$sec a
$4q-a$	$360-a$	$-$sen a	$+$cos a	$-$tan a	$-$cot a	$+$sec a	$-$cosec a
$4q$	360°	0	1	0	∞	1	∞
$4q\pm a$	$360\pm a$	$\pm$sen a	$+$cos a	$\pm$tan a	$\pm$cot a	$+$sec a	$\pm$cosec a
$(2n+1)q\pm a$	$n.180+90\pm a$	$\mp$sen a	$-$cos a	$\pm$tan a	$\mp$cot a	$-$sec a	$\mp$cosec a

46. Si osserva in questo quadro, nel quale il raggio è fatto uguale all'unità.

1° Che il seno e coseno possono crescere da o ad 1 positivo e negativo. E che perciò $+1$ e -1 ne sono i limiti. Il loro valore numerico è sempre minore dell'unità.

2° Che la secante e cosecante possono crescere da $+1$ sino all'infinito positivo, e da -1 sino all'infinito negativo. E che sempre il loro valor numerico è maggiore dell'unità.

3° Che la tangente e la cotangente sono suscettibili di qualunque valore da o sino all'infinito positivo, o negativo. La quale proprietà ne rende preziosissimo l'uso nell'analisi matematica.

4° Che negli angoli la cui specie non si sa se debba essere ottusa o acuta, e negli archi minori di $180°$ essendo il seno lo stesso e per valore e per segno tanto per a che pel suo supplemento $180-a$, non si può decidere a quale dei due archi esso si appartenga.

5° Che un tal dubbio è tolto dal coseno, perchè sebbene $\cos a$ e $\cos (180-a)$ siano numericamente uguali, il secondo però è negativo. Lo stesso succede per le tangenti, e cotangenti.

47. Come le funzioni circolari sono positive o negative secondo che sono descritte con operazioni contrarie le une relativamente all'altre; così gli archi stessi sono negativi quando si valutano in direzione opposta a quelli assunti per positivi. Se l'arco MB è positivo, MB'' sarà negativo. Il movimento de' pianeti secondo l'ordine dei segni è positivo, è negativo nella direzione contraria. Onde li quadranti descritti da A verso D saranno positivi, e negativi quelli che si considerano da A in D'. Onde li segni delle linee trigonometriche in un'arco del primo quadrante negativo sono li stessi del quarto quadrante positivo. Sia un'arco

negativo — a minore di 90° l'equazione alla curva dimostra, che l'arco negativo è dalla parte opposta alla metà di essa positiva: e che li seni e le tangenti vi si descrivono con operazioni in senso opposto; onde il suo seno quindi sarà negativo, e si esprime sen$-a$ $=-$ sen a, come pure sarà tan $-a=$ tan a; in tal caso cos $a=\frac{-\text{sen } a}{-\text{tan } a}=+$ cos a. Per maggior semplicità si è stabilito di costruire tutte le formole per il primo quadrante positivo, e per archi positivi minori di 90°.

48. Si son trovate finora le relazioni tra il raggio, e le funzioni di un'istesso angolo A del triangolo, e si sono ottenute le une espresse nelle altre. Giova ora cercare le funzioni della somma e della differenza di due angoli del medesimo, ma espresse in quelle degli angoli parziali, o sia [2] bisognerà cercare le funzioni dei due archi $a+b$ ed $a-b$, ma espresse nelle funzioni separate di a e di b.

49. Sia il triangolo ABC (*fig.3*), nel quale essendo il terzo angolo sempre supplemento della somma degli altri due, sarà sen $(A+B)=$ sen C. Per il § 18 si ha $AC : AB ::$ sen B : sen $C=\frac{AB}{AC}$ sen B, equazione il di cui secondo membro bisognerà che venisse espresso in funzioni degli angoli A e B. Abbassando dal vertice dell'angolo C la perpendicolare AD si avranno li due triangoli rettangoli ACD, BCD, dal primo dei quali per il § 16 si avrà $\frac{CD}{AC}=\frac{\text{sen } A}{r}$, e $\frac{AD}{AC}=\frac{\cos A}{r}$ e dal secondo $\frac{CD}{BC}=\frac{\text{sen } B}{r}$, e $\frac{BD}{BC}=\frac{\cos B}{r}$.

Ma per causa della perpendicolare essendo il lato $AB=BD+AD$ e nel triangolo BCD essendo sen B

$=\frac{r\,CD}{BC}$: sostituendo queste espressioni nel valore di sen $(A+B)$ o di sen C si avrà sen $(A+B)=$ sen C

$$=\frac{(BD+AD)}{AC}\times\frac{r\,CD}{BC}=\frac{r\,CD.BD}{AC.BC}+\frac{r\,AD.CD}{AC.BC}$$

e sostituendo al rapporto dei lati quello dei seni

$$\text{sen}\,(A+B)=\frac{r\,\text{sen}\,A\cos B}{r^2}+\frac{r\cos A\,\text{sen}\,B}{r^2}$$

$$=\frac{\text{sen}\,A\cos B+\cos A\,\text{sen}\,B}{r}$$

così il seno della somma di due angoli si avrà espressa nei seni e coseni degli angoli medesimi.

50. Se la perpendicolare $C'D'$ cade fuori, come nel triangolo $A'B'C'$, sarà il lato $A'B'=B'D'-A'D'$ e le proporzioni del triangolo rettangolo $A'C'D'$ non saranno come sopra coll' angolo interno $C'A'B'$ del triangolo, ma coll' angolo esterno $C'A'D'=180-C'A'B'=B'+C'$ e quindi $C'=A'-B'$, e si avrà $A'C':A'B'::\text{sen}\,B':\text{sen}\,C'=\text{sen}(A'-B')=\frac{A'B'\text{sen}B'}{A'C'}$ li due triangoli rettangoli daranno

$$\frac{C'D'}{A'C'}=\frac{\text{sen}\,C'A'D'}{r}\ldots\frac{A'D'}{A'C'}=\frac{\cos C'A'D}{r}\ldots\frac{C'D'}{B'C'}$$

$$=\frac{\text{sen}\,B}{r}\ldots\frac{B'D'}{B'C'}=\frac{\cos B}{r},\ \text{e quindi}\ \frac{r\,C'D'}{B'C'}=\text{sen}\,B.$$

sostituendo si avrà $\text{sen}\,(A'-B')=\left(\frac{B'D'-A'D'}{A'C'}\right)\times$

$$\frac{r\,C'D'}{B'C'}=\frac{r\,C'D'\,B'D'}{A'C'\,B'C'}-\frac{r\,A'D'\,C'D'}{A'C'\,B'C'}\ \text{e quindi}$$

$$\text{sen}\,(A'-B')=\frac{r\,\text{sen}\,C'A'D'\cos B'-r\cos C'A'C'\,\text{sen}\,B'}{r^2}$$

e riflettendo che l'angolo $B'A'C'$ interno del triangolo

è supplemento dell' esterno $C'A'D'$ e che perciò li loro seni sono uguali, sarà

$$\text{sen}\,(A'-B') = \frac{\text{sen}\,A'\cos B' - \cos A'\,\text{sen}\,B'}{r}.$$

51. Onde sostituendo gli archi a e b agli angoli A e B, A' e B'; e fatto $r=1$ si avrà

$$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\,a\cos b \pm \cos a\,\text{sen}\,b.$$

52. Le espressioni a, b, c, di loro natura rappresentano qualunque arco, e sono suscettibili di qualunque valore. Sia $c=90-a$, togliendo l'arco b sarà $c-b=90-a-b=90-(a+b)$ onde; [10] $\text{sen}\,(c-b)=\cos(a+b)$: come ancora $\text{sen}\,c=\cos a$, e $\cos c=\text{sen}\,a$; ma precedentemente si ebbe, che $\text{sen}\,(c-b)=\text{sen}\,c\cos b-\cos c\,\text{sen}\,b$: sostituendo in questa le equivalenti espressioni qui notate si ha $\text{sen}\,(c-b)=\cos(a+b)=\cos a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$.

53. Se in vece di sottrarre si aggiunga b all'arco c sarà $c+b=90-a+b=90-(a-b)$, e $\text{sen}(c+b)=\cos(a-b)$, e fatte le convenienti sostituzioni sarà $\text{sen}\,(c+b)=\cos(a-b)=\cos a\cos b+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$.

54. Onde generalmente

$$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b.$$

55. Le due equazioni 51 e 54 dipendenti dalle 49, 50, 52, 53, sono fondamentali, e di continuo uso; danno li seni e coseni della somma e della differenza di due archi quando sono noti li seni e coseni degli archi medesimi.

56. Facilmente si potranno da esse ottenere li seni e coseni della somma o della differenza di un maggior numero di archi; riflettendo che gli archi a e b possono supporsi uguali ciascuno alla somma o alla differenza di quanti altri archi si voglia. Così per es. sia $b=p+q$, sarà $\text{sen}\,(a+b)=\text{sen}\big(a+(p+q)\big)$

$=\text{sen}\, a \cos(p+q) + \cos a\, \text{sen}\,(p+q)$, e quivi sostituendo gli equivalenti valori [51 e 54] $\text{sen}\,\big(a+(p+q)\big)$ $=\text{sen}\, a \cos p \cos q + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, p\, \text{sen}\, q + \cos a\, \text{sen}\, p \cos q$ $+ \cos a \cos p\, \text{sen}\, q$. Dove, se si voglia, introducendo per p e q le denominazioni analoghe b e c sarà $\text{sen}\,(a+b+c) = \text{sen}\, a \cos b \cos c + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c$ $+ \cos a\, \text{sen}\, b \cos c + \cos a \cos b\, \text{sen}\, c$. Similmente $\cos(a-b-c) = \cos\big(a-(b+c)\big) = \cos a \cos(b+c)$ $+ \text{sen}\, a\, \text{sen}(b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a\, \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c$ $+ \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \cos c + \text{sen}\, a \cos b\, \text{sen}\, c$. Basta questo cenno per indicare la composizione di tali espressioni.

57. $\tan(a+b) = [25]\ \frac{\text{sen}\,(a+b)}{\cos(a+b)} \ldots [51 \text{ e } 54]$ $= \frac{\text{sen}\, a \cos b + \cos a\, \text{sen}\, b}{\cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}$; dividendo sotto e sopra il secondo membro successivamente prima per $\cos a \cos b$, indi per $\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$; e poi per $\text{sen}\, a \cos b$, e finalmente per $\cos a\, \text{sen}\, b$, riflettendo sempre che $\frac{\text{sen}}{\cos} = \tan$, e $\frac{\cos}{\text{sen}} = \cot$, si otterranno quattro valori di $\tan(a+b)$ espressi nelle tangenti e cotangenti degli archi a e b: e si troverà.

58. $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\cot b + \cot a}{\cot b \cot a - 1}$

59. $= \frac{1 + \cot a \tan b}{\cot a - \tan b} = \frac{\tan a \cot b + 1}{\cot b - \tan a}$

60. In simil guisa operando coi valori di $\tan(a-b)$ $= \frac{\text{sen}\,(a-b)}{\cos(a-b)}$ si avrà

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \frac{\cot b - \cot a}{\cot b \cot a + 1}$$

61. $$= \frac{1 - \cot a \tan b}{\cot a + \tan b} = \frac{\tan a \cot b - 1}{\cot b + \tan a}$$

le prime equazioni 58 e 60 si adoperano continuamente, le altre ben di raro.

62. Essendo $\cot = \frac{1}{\tan}$ [29] per ottenere le espressioni della cotangente basta rovesciare quelle della tangente, e si avrà

$$\cot(a+b) = \frac{1 - \tan a \tan b}{\tan a + \tan b} = \frac{\cot b \cot a - 1}{\cot b + \cot a} = \text{ec.}$$

63. $$\cot(a-b) = \frac{1 + \tan a \tan b}{\tan a - \tan b} = \text{ec.}$$

64. Sarà facile ora seguire le funzioni circolari nei diversi accidenti della loro situazione rispetto agli archi dei quadranti nei quali si trovano. Di fatti sia l'arco $a = 90$; sarà

$$sen\,(90 \pm b) = sen\;90\; cos\; b \pm cos\; 90\; sen\; b,$$

ma $\text{sen } 90 = 1$ e $\cos 90 = o$, dunque per un' arco che sia uguale a $90 \pm b$ sarà $\text{sen}(90 \pm b) = + \cos b$, In simil guisa in ciascuna delle formole precedenti facendo successivamente l'arco $a = 90^\circ, = 180^\circ, = 270^\circ. = 360^\circ$ otterremo

$$\text{sen}\begin{cases} 90 \pm b = + \cos b \\ 180 \pm b = \mp \text{sen } b \\ 270 \pm b = - \cos b \\ 360 \pm b = \pm \text{sen } b \end{cases} \qquad \tan\begin{cases} 90 \pm b = \mp \cot b \\ 180 \pm b = \pm \tan b \\ 270 \pm b = \mp \cot b \\ 360 \pm b = \pm \tan b \end{cases}$$

$$\cos\begin{cases} 90 \pm b = \mp \text{sen } b \\ 180 \pm b = - \cos b \\ 270 \pm b = \pm \text{sen } b \\ 360 \pm b = + \cos b \end{cases} \qquad \cot\begin{cases} 90 \pm b = \mp \tan b \\ 180 \pm b = \pm \cot b \\ 270 \pm b = \mp \tan b \\ 360 \pm b = \pm \cot b \end{cases}$$

In un colpo di occhio si conosce in questa tavola il segno di una funzione. Così per esempio si cerchi la tangente della longitudine 218°. 27'. 42". La tavoletta mostrerà che tan (218°. 27'. 42") = tan (180 + 38°. 27' 42") = + tan (38°. 27'. 42"). Si voglia il coseno dell'*AR*. 347°. 13'. 14". si vedrà che cos (347. 13. 14.) = cos (270 + 77. 13. 14.) = + sen (77. 13. 14.)

65. Sia nelle precedenti formole $a = b$, cioè bipartito l'arco $(a+b)$: dalla 49ª si ha

66. $\text{sen } 2a = 2 \text{ sen } a \cos a$.

67. dalla 54ª ... $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$, dove [22] essendo $\text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$, e $\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a$, sostituendo questi valori successivamente si otterrà.

68. $\cos 2a = 1 - 2 \text{ sen}^2 a = 2 \cos^2 a - 1$.

69. dalla 58ª ...

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2 \cot a}{\cot^2 a - 1} = \frac{2}{\cot a - \tan a}$$

e dividendo la 66ª per la 67ª e per la 68ª.

70. $$\tan 2a = \frac{2 \text{ sen } a \cos a}{\cos^2 a - \text{sen}^2 a} = \frac{2 \text{ sen } a \cos a}{1 - 2 \text{ sen}^2 a}$$

$$= \frac{2 \text{ sen } a \cos a}{2 \cos^2 a - 1}.$$

71. dalla 68ª si ottiene

$$\text{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}, \text{ e } \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}, \text{ onde}$$

72. $\text{sen } a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$, come anche

73. $\cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$: e dividendo quest'ultime

74. $\tan a = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}\right)}$.

75. Quadrando questa equazione, e trattando $\cos 2a$ come incognita emerge $\cos 2a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$.

76. $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$, ma $\operatorname{sen} a = \cos a \tan a$ onde $\operatorname{sen} 2a = 2 \tan a \cos^2 a$, e quindi $\tan a = \frac{\operatorname{sen} 2a}{2\cos^2 a}$

ma $2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$, dunque $\tan a = \frac{\operatorname{sen} 2a}{1+\cos 2a}$.

77. Oppure $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$, ma $\cos a = \frac{\operatorname{sen} a}{\tan a}$

dunque $\operatorname{sen} 2a = \frac{2\operatorname{sen}^2 a}{\tan a}$, onde $\tan a = \frac{2\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen} 2a}$; ma per la 68ª $2\operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos 2a$, sarà $\tan a = \frac{1-\cos 2a}{\operatorname{sen} 2a}$.

78. Uguagliando li valori $\operatorname{sen}^2 a = \frac{\operatorname{sen}^2 2a}{4\cos^2 a}$,

e $\cos^2 a = \frac{\operatorname{sen}^2 2a}{4\operatorname{sen}^2 a}$ presi dalla 66ª elevata al quadrato con li corrispondenti della 71ª si otterrà.

79. $\frac{\operatorname{sen}^2 2a}{4\cos^2 a} = \frac{1-\cos 2a}{2}$ e quindi $\cos a = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen} 2a}{2(1-\cos 2a)}\right)}$

80. $\frac{\operatorname{sen}^2 2a}{4\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1+\cos 2a}{2}$ e quindi $\operatorname{sen} a = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen} 2a}{2(1+\cos 2a)}\right)}$

81. Si osservi nelle espressioni ora formate, che essendo l'arco nel secondo membro doppio di quello del primo, si conservano le stesse trasformandole nelle seguenti, nelle quali resta fermo il rapporto dei due archi $\frac{a}{2a} = \frac{\frac{1}{2}a}{a}$; e si avrà

82. $\operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a$ ... [66].

83. $\cos a = \cos^2 \frac{1}{2} a - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a = 1 - 2\text{sen}^2 \frac{1}{2} a$

$= 2\cos^2 \frac{1}{2} a - 1 = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2} a}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a} \ldots [67] \ldots [75].$

84. $\tan a = \frac{2 \tan \frac{1}{2} a}{1 - \tan^2 \frac{1}{2} a} = \frac{2 \cot \frac{1}{2} a}{\cot^2 \frac{1}{2} a - 1} = \frac{2}{\cot \frac{1}{2} a - \tan \frac{1}{2} a}.$

85. $= \frac{2 \text{sen} \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{\cos^2 \frac{1}{2} a - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a} = \frac{2 \text{sen} \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{1 - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a} = \frac{2 \text{sen} \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{2 \cos^2 \frac{1}{2} a - 1}$

... [69] ... [70] ... colle prime, e con quest'ultime si hanno le funzioni di un'arco espresse in funzione della sua metà; e viceversa quelle di un'arco espresse nelle funzioni dell'arco doppio.

86. Noi ora andremo a dedurre dalla combinazione delle espressioni precedenti un gran numero di altre. Esse servono principalmente nelle trasformazioni e nelle riduzioni di quelle formole complicate e lunghe che spesso sorgono sia dal calcolo de' triangoli, sia dalle ricerche che si fanno intorno alle relazioni dei loro elementi; perchè offrono l'equivalenti espressioni più brevi e più adattate alla forma che si vuole ad esse far pigliare. Mostrano le espressioni che giova trovar pronte, per sostituirle subito a quelle che per le vicende del calcolo vengono complicate; e delle quali facilitano le semplificazioni necessarie all'ultimo sviluppo.

Si piglino a vicenda le somme e le differenze delle 51^a e 54^a e si otterrà

87. $\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2 \text{sen}\, a \cos b.$

88. $\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b) = 2 \cos a\, \text{sen}\, b.$

89. $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b.$

90. $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\, \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b.$

91. $\text{sen}(a+b) + \cos(a-b) =$

$(\cos a + \text{sen}\, a)(\cos b + \text{sen}\, b).$

92. $\cos(a-b) - \operatorname{sen}(a+b) =$
$(\cos a - \operatorname{sen} a)(\cos b - \operatorname{sen} b)$.

93. $\operatorname{sen}(a-b) + \cos(a+b) =$
$(\cos a + \operatorname{sen} a)(\cos b - \operatorname{sen} b)$.

94. $\cos(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) =$
$(\cos a - \operatorname{sen} a)(\cos b + \operatorname{sen} b)$.

95. $\operatorname{sen}(a+b) + \cos(a+b) =$
$\cos a(\cos b + \operatorname{sen} b) + \operatorname{sen} a(\cos b - \operatorname{sen} b)$.

96. $= \cos b(\cos a + \operatorname{sen} a) + \operatorname{sen} b(\cos a - \operatorname{sen} a)$.

97. $\cos(a+b) - \operatorname{sen}(a+b) =$
$\cos a(\cos b - \operatorname{sen} b) - \operatorname{sen} a(\cos b + \operatorname{sen} b)$.

98. $= \cos b(\cos a - \operatorname{sen} a) - \operatorname{sen} b(\cos a + \operatorname{sen} a)$.

99. $\operatorname{sen}(a-b) + \cos(a-b) =$
$\cos a(\cos b - \operatorname{sen} b) + \operatorname{sen} a(\cos b + \operatorname{sen} b)$.

100. $= \cos b(\cos a + \operatorname{sen} a) - \operatorname{sen} b(\cos a - \operatorname{sen} a)$.

101. $\cos(a-b) - \operatorname{sen}(a-b) =$
$\cos a(\cos b + \operatorname{sen} b) - \operatorname{sen} a(\cos b - \operatorname{sen} b)$.

102. $= \cos b(\cos a - \operatorname{sen} a) + \operatorname{sen} b(\cos a + \operatorname{sen} a)$.

Sommando sottraendo e semplificando la 87ª. 88ª. 89ª. e 90ª. si avrà

103. $2\cos a(\cos b + \operatorname{sen} b) =$
$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) + \big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$

104. $2\operatorname{sen} a(\cos b - \operatorname{sen} b) =$
$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) - \big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$

105. $2\cos b(\cos a + \operatorname{sen} a) =$
$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) + \big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$

106. $2\operatorname{sen} b(\cos a - \operatorname{sen} a) =$
$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) - \big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$

107. $2\cos a\,(\cos b - \text{sen}\, b) =$
$\cos(a+b) + \cos(a-b) - \big(\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)\big)$

108. $2\,\text{sen}\, a\,(\cos b + \text{sen}\, b) =$
$\cos(a-b) - \cos(a+b) + \big(\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)\big)$

109. $2\cos b\,(\cos a - \text{sen}\, a) =$
$\cos(a+b) + \cos(a-b) - \big(\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)\big)$

110. $2\,\text{sen}\, b\,(\cos a + \text{sen}\, a) =$
$\cos(a-b) - \cos(a+b) + \big(\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)\big)$

110. Dividendo la 87ª per l' 89ª o la 90ª per la 88ª si avranno separatamente le tangenti del maggiore e del minore dei due archi espresse nei seni e coseni delle somme e delle differenze dell'archi stessi.

$$\tan a = \frac{\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)}$$

Così pure la 88ª per l' 89ª e la 90ª per la 87ª

111. $\tan b = \dfrac{\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$

$= \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)}$ ... e quindi

112. $\dfrac{\tan a}{\tan b} = \dfrac{\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)}{\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)}$

Si sommino e si sottraggono le 110ª e 111ª, e rovesciando li secondi valori si faccia lo stesso per le cotangenti

113. $\tan a \pm \tan b = \dfrac{2\,\text{sen}(a \pm b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$.

114. $\cot b \pm \cot a = \dfrac{2\,\text{sen}(a \pm b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)}$

115. Si facci l'arco $(a+b) = p$, ed $(a-b) = q$: in

tale supposizione l' arco $a = \frac{1}{2}(p+q)$ e l' arco $b = \frac{1}{2}(p-q)$, sostituendo questi valori, e dividendo per 2 la 87ª e seguenti daranno.

116. $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)$.

117. $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q)$.

118. $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)$.

119. $\cos q - \cos p = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q)$.

120. Essendo p e q espressioni indeterminate di qualunque arco, come lo sono anche a e b, per l'uniformità del linguaggio le formole precedenti sono ben rappresentate dalle seguenti

121. $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$.

122. $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)$.

123. $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)$.

124. $\cos b - \cos a = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)$.

Mettendo sotto lo stesso aspetto ancora le più semplici tra le altre ottenute, avremo

125. $\cos b \pm \operatorname{sen} a =$

$$\left(\cos\tfrac{1}{2}(a+b) \pm \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a+b)\right)\left(\cos\tfrac{1}{2}(a-b) \pm \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a-b)\right)$$

126. $\cos a \pm \operatorname{sen} b =$

$$\left(\cos\tfrac{1}{2}(a+b) \pm \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a+b)\right)\left(\cos\tfrac{1}{2}(a-b) \mp \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a-b)\right)$$

127. $(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b) \pm (\cos a + \cos b) =$

$$2 \cos \tfrac{1}{2}(a-b) \left(\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a+b) \pm \cos \tfrac{1}{2}(a+b)\right)$$

128. $(\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b) \pm (\cos a + \cos b) =$

$$2 \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \left(\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a-b) \pm \cos \tfrac{1}{2}(a-b)\right)$$

129. $(\cos b - \cos a) \pm (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b) =$

$$2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a+b) \left(\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a-b) \pm \cos \tfrac{1}{2}(a-b)\right)$$

130. $(\cos b - \cos a) \pm (\text{sen}\, a - \text{sen}\, b) =$

$$2\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(a-b) \left(\text{sen}\, \tfrac{1}{2}(a+b) \pm \cos \tfrac{1}{2}(a+b)\right)$$

li segni superiori ed inferiori sono in corrispondeuza nei due membri.

Dividendo la 121ª per la 123ª, o la 124ª per la 122ª; e dopo la 122ª per la 123ª oppure la 124ª per la 121ª

131. $\tan \tfrac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}{\cos a + \cos b} = \dfrac{\cos b - \cos a}{\text{sen}\, a - \text{sen}\, b}$

132. $\tan \tfrac{1}{2}(a-b) = \dfrac{\text{sen}\, a - \text{sen}\, b}{\cos a + \cos b} = \dfrac{\cos b - \cos a}{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}$

e dividendo l'una per l'altra

133. $\dfrac{\tan \tfrac{1}{2}(a+b)}{\tan \tfrac{1}{2}(a-b)} = \dfrac{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a - \text{sen}\, b}$

134. Si noti in questa espressione, che se a e b rappresentano due angoli di un triangolo rettilineo, li loro seni ne rappresentano i lati opposti; e perciò essendo $\text{sen}\, a + \text{sen}\, b : \text{sen}\, a - \text{sen}\, b :: \tan \tfrac{1}{2}(a+b) : \tan \tfrac{1}{2}(a-b)$ ne siegue che la somma di due lati sta alla loro differenza come la tangente della semisomma degli angoli opposti sta alla tangente della loro semidifferenza. In vece della semisomma di due angoli opposti ai lati si può impiegare la metà del terzo angolo che è compreso tra i due lati. Perchè si sa che il terzo angolo nel triangolo e uguale 180° meno la somma degli altri due: e che [45] ....

$$\tan \tfrac{1}{2}(a+b) = \tan \tfrac{1}{2}\left(180^\circ - (a+b)\right)$$

Sommando e sottraendo in corrispondenza li valori 131 e 132 ne risultano

135. $\tan \tfrac{1}{2}(a+b) + \tan \tfrac{1}{2}(a-b) = \dfrac{2\, \text{sen}\, a}{\cos a + \cos b}$

136. $\tan \frac{1}{2}(a+b) - \tan \frac{1}{2}(a-b) = \frac{2 \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b}$

E sommandoli e sottraendoli rovesciati si ha similmente

137. $\cot \frac{1}{2}(a+b) + \cot \frac{1}{2}(a+b) = \frac{2 \operatorname{sen} a}{\cos b - \cos a}$

138. $\cot \frac{1}{2}(a-b) - \cot \frac{1}{2}(a+b) = \frac{2 \operatorname{sen} b}{\cos b - \cos a}$

Sommando, sottraendo e riducendo le 58 e 60 si troverà

139. $\tan(a+b) + \tan(a-b) =$

$$\frac{2 \tan a\,(1+\tan^2 b)}{1-\tan^2 a \tan^2 b} = \frac{2 \cot a\,(\cot^2 b+1)}{\cot^2 a \cot^2 b - 1}$$

140. $\tan(a+b) - \tan(a-b) =$

$$\frac{2 \tan b\,(1+\tan^2 a)}{1-\tan^2 a \tan^2 b} = \frac{2 \cot b\,(\cot^2 a+1)}{\cot^2 a \cot^2 b - 1}$$

141. $\cot(a+b) + \cot(a-b) =$

$$\frac{2 \cot a\,(\cot^2 b+1)}{\cot^2 b + \cot^2 a} = \frac{2 \tan a\,(1+\tan^2 b)}{\tan^2 a - \tan^2 b}$$

142. $\cot(a-b) - \cot(a+b) =$

$$\frac{2 \tan b\,(\tan^2 a+1)}{\tan^2 a - \tan^2 b} = \frac{2 \cot b\,(1+\cot^2 a)}{\cot^2 b - \cot^2 a}$$

e collo stesso metodo delle 120ª ec. si trasformeranno nelle seguenti

143. $\tan a + \tan b = \frac{2 \tan \frac{1}{2}(a+b)\left(1+\tan^2 \frac{1}{2}(a-b)\right)}{1-\tan^2 \frac{1}{2}(a+b) \tan^2 \frac{1}{2}(a-b)}$

$$= \frac{2 \cot \frac{1}{2}(a-b)\left(1+\cot^2 \frac{1}{2}(a-b)\right)}{\cot^2 \frac{1}{2}(a+b) \cot^2 \frac{1}{2}(a-b) - 1}$$

144. $\tan a - \tan b = \frac{2 \tan \frac{1}{2}(a-b)\left(1+\tan^2 \frac{1}{2}(a+b)\right)}{1-\tan^2 \frac{1}{2}(a+b) \tan^2 \frac{1}{2}(a-b)}$

$= \frac{2 \cot \frac{1}{2}(a-b)\left(1+\cot^2 \frac{1}{2}(a+b)\right)}{\cot^2 \frac{1}{2}(a+b) \cot^2 \frac{1}{2}(a-b) - 1}$

145. $\cot a + \cot b = \frac{2 \tan \frac{1}{2}(a+b)\left(\tan^2 \frac{1}{2}(a-b)+1\right)}{\tan^2 \frac{1}{2}(a+b) - \tan^2 \frac{1}{2}(a-b)}$

$= \frac{2 \cot \frac{1}{2}(a+b)\left(\cot^2 \frac{1}{2}(a-b)+1\right)}{\cot^2 \frac{1}{2}(a-b) - \cot^2 \frac{1}{2}(a+b)}$

146. $\cot b - \cot a = \frac{2 \tan \frac{1}{2}(a-b)\left(\tan^2 \frac{1}{2}(a+b)+1\right)}{\tan^2 \frac{1}{2}(a+b) - \tan^2 \frac{1}{2}(a-b)}$

$= \frac{2 \cot \frac{1}{2}(a-b)\left(1+\cot^2 \frac{1}{2}(a+b)\right)}{\cot^2 \frac{1}{2}(a-b) - \cot^2 \frac{1}{2}(a+b)}$

In tal modo si hanno le somme e le differenze delle funzioni di due archi espressi nelle funzioni delle somme o semisomme, e delle differenze o semidifferenze degli archi stessi.

Sommando i quadrati delle 51^a e 54^a

147. $\text{sen}^2 (a+b) + \text{sen}^2 (a-b) = 2 \text{ sen}^2 a \cos^2 b + 2 \cos^2 a \text{ sen}^2 b$, ma [71] .....

$$\text{sen}^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}, \text{ e } \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2},$$

sostituendo, moltiplicando, e riducendo si trova

$\text{sen}^2 (a+b) + \text{sen}^2 (a-b) = 1 - \cos 2a \cos 2b$

Dalla sottrazione si avrà

148. $\text{sen}^2(a+b) - \text{sen}^2(a-b) = 4 \text{ sen } a \cos a \text{ sen } b \cos b$
ma [66] $2 \text{ sen } a \cos a = \text{sen } 2a$, onde

$$\text{sen}^2 (a+b) - \text{sen}^2 (a-b) = \text{sen } 2a \text{ sen } 2b$$

Nella stessa guisa avremo dalle 51^a e 54^a

149. $\cos^2 (a+b) + \cos^2 (a-b) = 1 + \cos 2a \cos 2b$

150. $\cos^2(a-b) - \cos^2(a+b) = \text{sen } 2a \text{ sen } 2b$

151. $\cos^2(a-b) + \text{sen}^2(a+b) = \cos 2a \cos 2b$

152. $\cos^2(a+b) - \text{sen}^2(a-b) = \cos 2a \cos 2b$

Trasformando queste formole coll'artificio del numero 120 esse diventeranno come siegue

153. $\text{sen}^2 a + \text{sen}^2 b = 1 - \cos(a+b)\cos(a-b)$

154. $\cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos(a+b)\cos(a-b)$

155. $\left.\begin{matrix}\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b \\ \cos^2 b - \cos^2 a\end{matrix}\right\} = \text{sen}(a+b)\text{ sen}(a-b)$

156. $\left.\begin{matrix}\cos^2 b - \text{sen}^2 a \\ \cos^2 a - \text{sen}^2 b\end{matrix}\right\} = \cos(a+b)\cos(a-b)$

157. Se si moltiplichino tra di loro le formole stesse 54. 55. ec. e si sostituiscono nei prodotti del secondo membro li valori di sen^2 e di $\cos^2$ presi dalla 68ª si otterranno le quattro formole 87 e seguenti. È se la sostituzione si fa con $1-\cos^2 = \text{sen}^2$, e con $1-\text{sen}^2 = \cos^2$ si otterranno le formole 153 e 154

158. Dalla divisione della 51 per la 54 ottennimo ai numeri 58 e 60 li valori di $\tan(a+b)$ e di $\tan(a-b)$; ora operando in modo consimile colle altre combinazioni delle quattro formole fondamentali otterremo

$$\frac{\text{sen}(a-b)}{\text{sen}(a+b)} = \frac{\text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a}{\text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a}$$

si dividerà successivamente sotto e sopra il secondo membro per ciascuno de' suoi termini, tenendo presente che $\tan = \frac{1}{\cot} = \frac{\text{sen}}{\cos}$, e $\cot = \frac{1}{\tan} = \frac{\cos}{\text{sen}}$.

Ci dispenseremo di avvertire in appresso simili sostituzioni perchè facilmente saltano agli occhi. Troveremo.

159. $\frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}(a-b)} = \frac{\tan a - \tan b}{\tan a + \tan b} = \frac{\cot b - \cot a}{\cot b + \cot a}$

160. $$=\frac{1-\tan b\cot a}{1+\tan b\cot a}=\frac{\cot b\tan a-1}{\cot b\tan a+1}$$

161. $$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{1-\tan a\tan b}{1+\tan a\tan b}=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot a\cot b+1}$$

162. $$=\frac{\cot a-\tan b}{\cot a+\tan b}=\frac{\cot b-\tan a}{\cot b+\tan a}$$

163. $$\frac{\cos(a+b)}{\text{sen}(a-b)}=\frac{1-\tan a\tan b}{\tan a-\tan b}=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot b-\cot a}$$

164. $$=\frac{\cot a-\tan b}{1-\cot a\tan b}=\frac{\cot b-\tan a}{\tan a\cot b-1}$$

165. $$\frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{\tan a+\tan b}{1+\tan a\tan b}=\frac{\cot b+\cot a}{\cot a\cot b+1}$$

166. $$=\frac{1+\cot a\tan b}{\cot a+\tan b}=\frac{\tan a\cot b+1}{\cot b+\tan a}$$

Dividansi pure l'una per l'altra le 121ª e seguenti otterremo

167. $$\frac{\text{sen}\,a+\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a-\text{sen}\,b}=\tan\tfrac{1}{2}(a+b)\cot\tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}(a-b)}$$ ...come nella 133ª

168. $$\frac{\cos b-\cos a}{\cos b+\cos a}=\tan\tfrac{1}{2}(a+b)\tan\tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\cot\frac{1}{2}(a-b)}$$

169. $$\frac{\text{sen}\,a+\text{sen}\,b}{\cos a+\cos b}=\frac{\cos b-\cos a}{\text{sen}\,a-\text{sen}\,b}=$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{\cot\frac{1}{2}(a+b)}$$ ...come nella 131ª

170. $$\frac{\text{sen}\,a-\text{sen}\,b}{\cos a+\cos b}=\frac{\cos b-\cos a}{\text{sen}\,a+\text{sen}\,b}=$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{\cot \tfrac{1}{2}(a-b)} \ldots \text{come nelle } 132^{a}$$

E nello stesso modo dividendo la 125ª per la 126ª, eppure la 126ª per la 125ª presi i segni in corrispondenza, si ha

171. $$\frac{\operatorname{sen} a + \cos b}{\cos a + \operatorname{sen} b} = \frac{1 + \tan \tfrac{1}{2}(a-b)}{1 - \tan \tfrac{1}{2}(a-b)}$$

172. $$= \frac{\cos a - \operatorname{sen} b}{\cos b - \operatorname{sen} a} = \frac{\cot \tfrac{1}{2}(a-b) + 1}{\cot \tfrac{1}{2}(a-b) - 1}$$

173. $$\frac{\operatorname{sen} a + \cos b}{\cos a - \operatorname{sen} b} = \frac{1 + \tan \tfrac{1}{2}(a+b)}{1 - \tan \tfrac{1}{2}(a+b)}$$

174. $$= \frac{\operatorname{sen} b + \cos a}{\cos b - \operatorname{sen} a} = \frac{\cot \tfrac{1}{2}(a+b) + 1}{\cot \tfrac{1}{2}(a+b) - 1}$$

Qui trattando $\tan \tfrac{1}{2}(a-b)$, e $\tan \tfrac{1}{2}(a+b)$ come incognite si ottiene

175. $$\tan \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{(\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b) + (\cos b - \cos a)}{(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b) + (\cos b + \cos a)}$$

176. $$= \frac{(\cos b - \operatorname{sen} b) - (\cos a - \operatorname{sen} a)}{(\cos b + \operatorname{sen} b) + (\cos a + \operatorname{sen} a)}$$

177. $$\tan \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b) + (\cos b - \cos a)}{(\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b) + (\cos b + \cos a)}$$

178. $$= \frac{(\cos b + \operatorname{sen} b) - (\cos a - \operatorname{sen} a)}{(\cos b - \operatorname{sen} b) + (\cos a + \operatorname{sen} a)}$$

179. Molte volte si è dovuto notare, che il bisogno di rendere positivo il secondo membro ha obbligato a sottrarre sempre il coseno dell'arco maggiore dal coseno del minore.

Si esprimano ora le somme e le differenze delle tangenti di due archi per mezzo de' seni e de' coseni.

180. $$\tan a + \tan b = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} =$$

$$\frac{\text{sen}\, a \cos b + \cos a\, \text{sen}\, b}{\cos a \cos b} = \frac{\text{sen}\,(a+b)}{\cos a \cos b},$$ e similmente

181. $\tan a - \tan b = \dfrac{\text{sen}\,(a-b)}{\cos a \cos b}$

182. $\cot a + \cot b = \dfrac{\text{sen}\,(a+b)}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}$

183. $\cot b - \cot a = \dfrac{\text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}$

184. $\tan a + \cot b = \dfrac{\cos\,(a-b)}{\cos a\, \text{sen}\, b}$

185. $\cot b - \tan a = \dfrac{\cos\,(a+b)}{\cos a\, \text{sen}\, b}$

186. $\cot a + \tan b = \dfrac{\cos\,(a-b)}{\text{sen}\, a \cos b}$

187. $\cot a - \tan b = \dfrac{\cos\,(a+b)}{\text{sen}\, a \cos b}$

188. Il prodotto delle due equazioni 180 e 181 darà $\tan^2 a - \tan^2 b = \dfrac{\text{sen}\,(a+b)\, \text{sen}\,(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$

189. La 182ª per la 183ª

$$\cot^2 b - \cot^2 a = \frac{\text{sen}\,(a+b)\, \text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}^2 a\, \text{sen}^2 b}$$

la 184ª per la 185ª

$$\cot b^2 - \tan^2 a = \frac{\cos\,(a-b) \cos\,(a+b)}{\cos^2 a\, \text{sen}^2 b}$$

la 186ª per la 187ª

$$\cot^2 a - \tan^2 b = \frac{\cos\,(a-b) \cos\,(a+b)}{\text{sen}^2 a \cos^2 b}$$

la somma dei quadrati delle 180 e 181, e delle 182 e 183 daranno

192. $\tan^2 a + \tan^2 b = \frac{\text{sen}^2 (a+b) + \text{sen}^2 (a-b)}{2 \cos^2 a \cos^2 b}$

193. $\cot^2 a + \cot^2 b = \frac{\text{sen}^2 (a+b) + \text{sen}^2 (a-b)}{2 \,\text{sen}^2 a \,\text{sen}^2 b}$

La sottrazione di questi quadrati medesimi darà

194. $\tan a \tan b = \frac{\text{sen}^2 (a+b) - \text{sen}^2 (a-b)}{4 \cos^2 a \cos^2 b}$

195. $\cot a \cot b = \frac{\text{sen}^2 (a+b) - \text{sen}^2 (a-b)}{4 \,\text{sen}^2 a \,\text{sen}^2 b}$

moltiplicando l'equazione per il denominatore del secondo membro, e riflettendo che $2 \,\text{sen}\, a \cos a = \text{sen}\, 2a$ si troverà

196. $\text{sen}\, 2a \,\text{sen}\, 2b = \text{sen}^2 (a+b) - \text{sen}^2 (a-b)$, oppure

197. $\text{sen}\, a \,\text{sen}\, b = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(a+b) - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(a-b)$

198. $\phantom{\text{sen}\, a \,\text{sen}\, b} = \cos^2 \tfrac{1}{2}(a-b) - \cos^2 \tfrac{1}{2}(a+b)$

Queste trasformate secondo il num.° 120 pigliano l'aspetto delle trovate più sopra.

Altri rapporti tra le funzioni di un'arco.

Sul principio limitandoci alle più semplici, risparmiammo ai giovani la ricerca di molte altre espressioni relative alle funzioni di un'arco e della sua metà; saranno essi ora meglio in istato di sviluppare le restanti.

La 84ª avea dato $\tan a = \frac{2 \tan \frac{1}{2} a}{1 - \tan^2 \frac{1}{2} a}$ la quale divisa sotto e sopra per $\tan \frac{1}{2} a$ diede [84]

199. $\tan a = \frac{2}{\cot \frac{1}{2} a - \tan \frac{1}{2} a}$ onde

200. $\cot \frac{1}{2} a - \tan \frac{1}{2} a = \frac{2}{\tan a} = 2 \cot a$, onde

201. $\tan \frac{1}{2} a = \cot \frac{1}{2} a - 2 \cot a$

202. dalla 83ª si ha $1 - \cos a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a =$ $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} a$; e dalla 82ª, $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos \frac{1}{2} a}$, sostituendo sarà $1 - \cos a = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} = \operatorname{sen} a \tan \frac{1}{2} a$ onde

203. $\tan \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a} - \cot a$:

204. Di poi; $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{1}{2} a = 2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a$ $= [82] \ldots \frac{\cos \frac{1}{2} a \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a} = \operatorname{sen} a \cot \frac{1}{2} a$, e quindi

$\cot \frac{1}{2} a = \frac{1 + \cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a} + \cot a$; e quindi

205. $\tan \frac{1}{2} a = [76] \frac{\operatorname{sen} a}{1 + \cos a} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{sen} a} + \cot a}$

$$= \frac{\operatorname{sen} a}{1 + \cot a \operatorname{sen} a}.$$

Moltiplicando la 200ª per la 202ª

206. $\tan^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$

207. Onde poicchè $\frac{\operatorname{sen} a}{1 + \cos a} = \tan \frac{1}{2} a$; se a è l'angolo obbliquo in un triangolo rettangolo, [15]; *sen a* sarà il lato opposto e *cos a* il lato adjacente, e l'ipotenusa sarà uguale al raggio $= 1$: e questa espressione dimostra che nel triangolo rettangolo il lato opposto ad un'angolo obbliquo diviso per la somma del-

l'ipotenusa col lato adjacente farà conoscere la tangente della metà di quest'angolo.

208. Anche [203] $\tan\frac{1}{2}a = \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a}$.... dimostra che nel triangolo rettangolo la differenza tra l'ipotenusa e il lato adjacente di un' angolo obbliquo, divisa per il lato opposto, è anche uguale alla tangente della metà dell'angolo.

209. E la 206 dimostra, che nel triangolo rettangolo la tangente della metà di un'angolo è media proporzionale tra la somma e la differenza dell'ipotenusa col lato adjacente all'angolo.

210. $\operatorname{sen} a = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a = 2\tan\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}a$

onde, [26], [30], $\operatorname{sen} a = \frac{2\tan\frac{1}{2}a}{1+\tan^2\frac{1}{2}a} = \frac{2\cot\frac{1}{2}a}{\cot^2\frac{1}{2}a+1}$...

ma $2\tan\frac{1}{2}a = \tan a\,(1-\tan^2\frac{1}{2}a)$, [84], e $\frac{\operatorname{sen}}{\tan} = \cos$

onde

211. $\cos a = \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}a}{1+\tan^2\frac{1}{2}a} = \frac{\cot^2\frac{1}{2}a-1}{\cot^2\frac{1}{2}a+1}$

Moltiplicando sotto e sopra queste due per $\cot\frac{1}{2}a$...

212. $\operatorname{sen} a = \frac{2}{\cot\frac{1}{2}a+\tan\frac{1}{2}a} = \frac{2\cot\frac{1}{2}a}{\cot^2\frac{1}{2}a+1}$

$= \frac{2\tan\frac{1}{2}a}{1+\tan^2\frac{1}{2}a}$: come si era trovato.

213. $\cos a = \frac{\cot\frac{1}{2}a-\tan\frac{1}{2}a}{\cot\frac{1}{2}a+\tan\frac{1}{2}a}$

Sostituendo nella 212 il valore [201] di $\tan\frac{1}{2}a$, e divisa la frazione per 2,

214. $\operatorname{sen} a = \frac{1}{\cot\frac{1}{2}a-\cot a} = \frac{\tan\frac{1}{2}a\tan a}{\tan a-\tan\frac{1}{2}a}$

e divisa per $\tan a$,

215. $\cos a = \frac{\cot a}{\cot \frac{1}{2} a - \cot a} = \frac{\tan \frac{1}{2} a}{\tan a - \tan \frac{1}{2} a}$

216. $1 - \operatorname{sen} a = [210],\ 1 - \frac{2 \tan \frac{1}{2} a}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a}$

$$= \frac{(1 - \tan \frac{1}{2} a)^2}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a} = \frac{(\cot \frac{1}{2} a - 1)^2}{\cot^2 \frac{1}{2} a + 1}$$

217. $1 + \operatorname{sen} a = 1 + \frac{2 \tan \frac{1}{2} a}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a}$

$$= \frac{(1 + \tan \frac{1}{2} a)^2}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a} = \frac{(\cot \frac{1}{2} a + 1)^2}{\cot^2 \frac{1}{2} a + 1}$$

Dividendo queste l'una per l'altra

218. $\frac{1 - \operatorname{sen} a}{1 + \operatorname{sen} a} = \left(\frac{1 - \tan \frac{1}{2} a}{1 + \tan \frac{1}{2} a}\right)^2 = \left(\frac{\cot \frac{1}{2} a - 1}{\cot \frac{1}{2} a + 1}\right)^2$

219. La 203 da $\tan \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1 - \cos a}{\cos a \tan a}$

onde $\tan \frac{1}{2} a \tan a = \frac{1 - \cos a}{\cos a} = \frac{1}{\cos a} - 1$, e quindi

$\frac{1}{\cos a} = 1 + \tan \frac{1}{2} a \tan a$; e finalmente

220. $\cos a = \frac{1}{1 + \tan \frac{1}{2} a \tan a} = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot a}{1 + \cot \frac{1}{2} a \cot a}$

Nello stesso modo dalla 204ª si ha $\cot \frac{1}{2} a \tan a$
$= \frac{1 + \cos a}{\cos a} = \frac{1}{\cos a} + 1$; e quindi

221. $\cos a = \frac{1}{\cot \frac{1}{2} a \tan a - 1} = \frac{\tan \frac{1}{2} a}{\tan a - \tan \frac{1}{2} a}$

$$= \frac{\cot a}{\cot \frac{1}{2} a - \cot a}$$

222. $1 - \cos a = [83]\ 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a = 2(1 - \cos^2 \frac{1}{2} a)$

$$= 1 - \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2} a}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a}$$

223. Quivi riducendo si ha $1-\cos a = \frac{2 \tan^2 \frac{1}{2} a}{1+\tan^2 \frac{1}{2} a}$

224. $1-\cos a = [26],\ 1-\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 a)}}$
$$= \frac{\sqrt{(1-\tan^2 a)}-1}{\sqrt{(1-\tan^2 a)}}$$

225. $1-\cos a = [25]\ 1-\frac{\text{sen}\ a}{\tan a} = 1-\frac{\text{sen}\ a \cos a}{\text{sen}\ a}$
$= [66]\ 1-\frac{\text{sen}\ 2a}{2\ \text{sen}\ a} = [73]\ 1-\sqrt{\left(\frac{1+\cos 2a}{2}\right)}\ \ldots\ldots$
sono tante espressioni del *seno verso*

226. Onde, [35], si avrà *sen v.* $45^\circ = 1-\sqrt{\frac{1}{2}}\ldots$ *sen v.* $30 = 1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\ldots$ *sen v.* $60^\circ = \frac{1}{2}$

Funzioni di un'arco unito con 45°, *con* 30°, *con* 60°.

Si faccia ora l'arco $a = 45^\circ$; sovvenendosi che $\text{sen}\ 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$: e che $\tan 45^\circ = 1 = \cot 45.^\circ$
Per la 51ª e 54ª

227. $\text{sen}\ (45 \pm b) = \text{sen}\ 45\ (\cos b \pm \text{sen}\ b) = \cos 45\ (\cos b \pm \text{sen}\ b) = \cos\ (45 \mp b)$

228. Onde $\cos b \pm \text{sen}\ b = \frac{\text{sen}\ (45 \pm b)}{\text{sen}\ 45} = \frac{\cos (45 \mp b)}{\cos 45}$
$= \text{sen}\ (45 \pm b)\ \sqrt{2}$

229. $\text{sen}(45 \pm b) = \cos\ (45 \mp b) = \frac{\cos b \pm \text{sen}\ b}{\sqrt{2}}$

230. $\tan\ (45+b) = \frac{\cos b + \text{sen}\ b}{\cos b - \text{sen}\ b} = \frac{1+\tan b}{1-\tan b}$

231. $\tan (45-b) = \frac{\cos b - \text{sen}\ b}{\cos b + \text{sen}\ b} = \frac{1-\tan b}{1+\tan b}$

232. Se si avesse fatto nella 51ª e 54ª $b = 45$ si avrebbe avuto $\text{sen}\, a \pm \cos a = \text{sen}\,(a \pm 45)\sqrt{2}$ $= \cos(a \mp 45)\sqrt{2}$; come anche $\tan(a \pm 45) = \frac{\tan a \pm 1}{\tan a \mp 1}$ Onde nel primo caso si suppone $b < 45$, nel secondo $45° < a$.

233. Combinando i due casi si vede che si ha un valore positivo sempre che si pigli la differenza positiva. Cioè $\text{sen}\,(45 \underset{\backsim}{+} b) = \cos\,(45 \overset{\backsim}{+} b) =$

$$\text{sen}\,(b \underset{\backsim}{+} 45) = \cos\,(b \underset{\backsim}{+} 45)$$

234. L'espressione $\tan\,(45 \backsim a) = \frac{\cos a \backsim \text{sen}\, a}{\cos a + \text{sen}\, a}$ è di grand' uso. Li lati di un triangolo rettangolo, sono suscettibili di qualunque valore numerico; ma sono sempre *sen a* lato opposto, e *cos a* lato adjacente all'angolo a: mentre l'angolo a è dipendente dal loro rapporto. Perciò sarà la tangente della differenza di quest'angolo con $45°$ uguale alla differenza dei lati divisa per la loro somma. Ma l' angolo a si conoscerà sempre, perchè $\frac{\text{sen}\, a}{\cos a} = \tan a$ [18] $= \frac{\text{lato opposto}}{\text{lato adjacente}}$: onde generalizzando ne viene, che avendosi due quantità ineguali x e y si può sempre fare $\frac{x}{y} = \tan z$, e di poi $\tan\,(z \backsim 45) = \frac{x \backsim y}{x + y}$.

235. L'angolo z nato così dal rapporto delle due quantità x ed y dicesi *angolo ausiliario*. E generalmente si dà un tal nome a tutti gli angoli, che si formano nel momento coi rapporti conosciuti, e che dopo di aver servito al bisogno non figurano più tra i risultati.

236. $\tan(45+b) - \tan(45-b) =$

$$\frac{1+\tan b}{1-\tan b} - \frac{1-\tan b}{1+\tan b} = \frac{4\tan b}{1-\tan^2 b}$$

ma per la 69ª ... $2\tan 2b = \frac{4\tan b}{1-\tan^2 b}$ dunque

237. $\tan 2b = \frac{\tan(45+b) - \tan(45-b)}{2}$; e

$$\tan b = \frac{\tan(45+\frac{1}{2}b) - \tan(45-\frac{1}{2}b)}{2}$$

238. Il quadrato della 229 darà $\text{sen}^2(45\pm b) =$

$$\cos^2(45\mp b) = \frac{\cos^2 b + \text{sen}^2 b \pm 2\,\text{sen}\, b\cos b}{2}$$

ma $2\,\text{sen}\, b\cos b = \text{sen}\, 2b$, e $\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$ dunque

239. $\text{sen}^2(45\pm b) = \cos^2(45\mp b) = \frac{1\pm\text{sen}\, 2b}{2}$

ovvero, che è lo stesso,

240. $2\,\text{sen}^2(45\pm\frac{1}{2}b) = 2\cos^2(45\mp\frac{1}{2}b) = 1\pm\text{sen}\, b$ onde

241. $\tan^2(45+\frac{1}{2}b) = \frac{1+\text{sen}\, b}{1-\text{sen}\, b}$

242. $\tan^2(45-\frac{1}{2}b) = \frac{1-\text{sen}\, b}{1+\text{sen}\, b}$

243. $\text{sen}\, b = 2\,\text{sen}^2(45+\frac{1}{2}b) - 1 = 2\cos^2(45-\frac{1}{2}b) - 1$ $= 1 - 2\,\text{sen}^2(45-\frac{1}{2}b) = 1 - 2\cos^2(45+\frac{1}{2}b)$; si rifletta che $\text{sen}(45+b) = \cos(45-b)$

244. $\text{sen}\, b = \frac{\tan^2(45+\frac{1}{2}b) - 1}{\tan^2(44+\frac{1}{2}b) + 1} = \frac{1-\tan^2(45-\frac{1}{2}b)}{1+\tan^2(45-\frac{1}{2}b)}$

moltiplicando per $\cot(45+\frac{1}{2}b)$, e $\cot(45-\frac{1}{2}b)$

245. $\text{sen}\, b = \frac{\tan(45+\frac{1}{2}b) - \cot(45+\frac{1}{2}b)}{\tan(45+\frac{1}{2}b) + \cot(45+\frac{1}{2}b)}$

$= \frac{\tan(45+\frac{1}{2}b) - \tan(45-\frac{1}{2}b)}{\tan(45+\frac{1}{2}b) + \tan(45-\frac{1}{2}b)}$

La 245 divisa per la 237 daranno

246. $\cos b = \frac{2}{\tan(45+\frac{1}{2}b) + \tan(45-\frac{1}{2}b)}$

$= \frac{2}{\cot(45+\frac{1}{2}b) + \cot(45-\frac{1}{2}b)}$

In questa convertendo le tangenti in $\frac{\text{sen}}{\cos}$, e riflettendo che sen $90 = 1$ si avrà

247. $\cos b = 2\cos(45+\frac{1}{2}b)\cos(45-\frac{1}{2}b)$

248. Sia $a = 30^\circ$: e perciò [35] sen $30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, e $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$; le 51ª e seguenti daranno

249. $\text{sen}(30 \pm b) = \frac{1}{2}(\cos b \pm \text{sen}\, b\sqrt{3})$

250. $\cos(30 \mp b) = \frac{1}{2}(\cos b\sqrt{3} \pm \text{sen}\, b)$

251. $\tan(30 \pm b) = \frac{1 \pm \tan b\sqrt{3}}{\sqrt{3} \mp \tan b} = \frac{\cot b \pm \sqrt{3}}{\cot b\sqrt{3} \mp 1}$

dalle 87ª e seguenti si ha

252. $\cos b = \text{sen}(30+b) + \text{sen}(30-b)$

$= \frac{\cos(30+b) + \cos(30-b)}{\sqrt{3}}$

253. $\text{sen}\, b = \frac{\text{sen}(30+b) - \text{sen}(30-b)}{\sqrt{3}}$

$= \cos(30-b) - \cos(30+b)$

253. $\tan b = \frac{\cos(30-b) - \cos(30+b)}{\operatorname{sen}(30+b) + \operatorname{sen}(30-b)}$

$= \frac{\operatorname{sen}(30+b) - \operatorname{sen}(30-b)}{\cos(30+b) + \cos(30-b)}$

In simil guisa, fatto $a = 60$, si otterrà

254. $\operatorname{sen}(60 \pm b) = \frac{1}{2}(\cos b \sqrt{3} \pm \operatorname{sen} b)$

255. $\cos(60 \mp b) = \frac{1}{2}(\cos b \pm \operatorname{sen} b \sqrt{3})$

256. $\tan(60 \pm b) = \frac{\sqrt{3} \pm \tan b}{1 \mp \tan b \sqrt{3}} = \frac{\cot b \sqrt{3} \pm 1}{\cot b \mp \sqrt{3}}$

257. $\cos b = \frac{\operatorname{sen}(60+b) + \operatorname{sen}(60-b)}{\sqrt{3}}$

$= \cos(60+b) + \cos(60-b)$

258. $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen}(60+b) - \operatorname{sen}(60-b)$

$= \frac{\cos(60-b) - \cos(60+b)}{\sqrt{3}}$

259. $\tan b = \frac{\operatorname{sen}(60+b) - \operatorname{sen}(60-b)}{\cos(60+b) + \cos(60-b)}$

$= \frac{\cos(60-b) - \cos(60+b)}{\operatorname{sen}(60+b) + \operatorname{sen}(60-b)}$

Nella 131ª e seguenti si facci $a = 90$, non dimenticando che $\operatorname{sen} 90 = 1$, e $\cos 90 = 0$

260. $\frac{\tan(45 + \frac{1}{2} b)}{\tan(45 - \frac{1}{2} b)} = \frac{1 + \operatorname{sen} b}{1 - \operatorname{sen} b}$

261. $\tan(45 + \frac{1}{2} b) = \frac{1 + \operatorname{sen} b}{\cos b} = \frac{\cos b}{1 - \operatorname{sen} b}$

262. $\tan(45 - \frac{1}{2} b) = \frac{1 - \operatorname{sen} b}{\cos b} = \frac{\cos b}{1 + \operatorname{sen} b}$

263. $\tan(45+\frac{1}{2}b)\tan(45-\frac{1}{2}b)=\frac{\cos b}{\cos b}=1$, in conferma che l'arco di $45°+a$ è complemento di $45°-a$.

Con $a=90$ parimenti si avrebbe dalle 121.ª e seguenti

264. $\operatorname{sen} b=2\operatorname{sen}(45+\frac{1}{2}b)\cos(45-\frac{1}{2}b)-1$

265. $\operatorname{sen} b=1-2\cos(45+\frac{1}{2}b)\operatorname{sen}(45-\frac{1}{2}b)$

266. $\cos b=2\cos(45+\frac{1}{2}b)\cos(45-\frac{1}{2}b)$.

267. $\cos b=2\operatorname{sen}(45+\frac{1}{2}b)\operatorname{sen}(45-\frac{1}{2}b)$

Queste formolette erano state già trovate ai numeri 243 e 247 messe sotto un'altro aspetto.

268. Poichè li tre angoli del triangolo (*fig. 1*) sono uguali a due retti, sarà $A+B+C=180°$, e per conseguenza $A+B=180-C$; e $\tan C=$

$$-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}$$

onde $\tan A\tan B\tan C-\tan C=\tan A+\tan B$, e finalmente,

$$\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C.$$

269. Onde la somma delle tangenti di tre archi è uguale al loro prodotto. E perchè le tangenti di loro natura sono suscettibili di qualunque valore [46], e possono rappresentare qualunque quantità, questa formola dimostra, che in numero infinito sono le soluzioni del problema: *trovare tre quantità la di cui somma sia uguale al loro prodotto.*

Serie che esprimono gli archi nelle loro funzioni, e viceversa.

270. Abbiamo fin qui maneggiati archi di circolo, e linee rette, che sono quantità eterogenee di lor natura, ed abbiamo veduto li rapporti delle funzioni di questi archi col raggio. Giova ora cercare la maniera di rendere comparabili gli archi col raggio, e ciò otterremo esprimendo la curva per mezzo delle sue funzioni, cioè mettendola in rapporto col raggio del circolo a cui appartiene. Varie sono le strade per giugnervi, noi adopreremo quella semplicissima che viene somministrata dal calcolo differenziale.

271 Secondo li principj del calcolo differenziale si ha la differenziale infinitesima dell'arco a

$$\vartheta\, a = \frac{\vartheta \operatorname{sen} a}{\cos a} = \frac{\vartheta \operatorname{sen} a}{\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2 a)}} = \vartheta \operatorname{sen} a \sqrt{(1-\operatorname{sen}^2 a)}^{-\frac{1}{2}}$$

Alzata al solito colla formola del binomio l'espressione $1-\operatorname{sen}^2 a$ alla potenza $-\frac{1}{2}$, si avrà la serie differenziale

$$a = \vartheta \operatorname{sen} a \left(1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 a + \frac{1.3}{2.4} \operatorname{sen}^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6} \operatorname{sen}^6 a + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \operatorname{sen}^8 a + \text{ec.}\right)$$

serie infinita la di cui legge è manifesta.

272. Sapendosi che l' integrale di ϑa è lo stesso arco a, integrando il secondo membro si esprimerebbe l'arco a per mezzo del suo seno. Di fatti 1° il primo termine della serie è $\vartheta \operatorname{sen} a \times 1 = \vartheta \operatorname{sen} a$, il di cui integrale è evidentemente sen a. 2° Il secondo termine è $\frac{1}{2}\, \vartheta \operatorname{sen} a \operatorname{sen}^2 a$. Si sa che per integrare

le differenziali monomie si accresce di un'unità l'esponente della variabile, e si divide per la differenziale della variabile moltiplicata per l'esponente stesso così accresciuto, onde sarà

$$S\,\tfrac{1}{2}\,\partial\,\text{sen}\,a\,\text{sen}^2\,a = \tfrac{1}{2} \times \frac{\partial\,\text{sen}\,a\,\text{sen}^3\,a}{3\,\partial\,\text{sen}\,a} = \frac{\text{sen}^3\,a}{2.3}$$

3° Nello stesso modo operando sul terzo termine sarà

$$S\,\frac{1.3}{2.4}\,\partial\,\text{sen}\,a\,\text{sen}^4\,a = \frac{1.3}{2.4} \times \frac{\partial\,\text{sen}\,a\,\text{sen}^5\,a}{5\,\partial\,\text{sen}\,a} = \frac{1.3\,\text{sen}^5\,a}{2.4.5}$$

4° Così pure per il quarto termine

$$S\,\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\partial\,\text{sen}\,a\,\text{sen}^6 a = \frac{1.3.5}{2.4.6} \times \frac{\partial\,\text{sen}\,a\,\text{sen}^7\,a}{7\,\partial\,\text{sen}\,a} = \frac{1.3.5\,\text{sen}^7\,a}{2.4.6.7}$$

e così con gli altri termini operando si otterrà finalmente.

$$273.\quad a = \text{sen}\,a + \frac{\text{sen}^3\,a}{2.3} + \frac{3\,\text{sen}^5\,a}{2.4.5} + \frac{3.5\,\text{sen}^7\,a}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7\,\text{sen}^9\,a}{2.4.6.8.9} + \text{ec.}$$

274. Col medesimo artificio si opera sulla differenziale infinitesima del coseno dell'arco a: Perchè essendo

$$-\partial\cos a = \partial\,a\,\text{sen}\,a,\ \text{sarà}\ \partial\,a = \frac{-\partial\cos a}{\text{sen}\,a}$$

$= \frac{-\partial\cos a}{\sqrt{(1-\cos^2 a)}} = -\partial\cos a\,(1-\cos^2 a)^{-\frac{1}{2}}$ sviluppata la serie, e fatte le riduzioni si otterrà

$$275.\quad a = 1{,}5707963 - \cos a - \frac{\cos^3 a}{2.3} - \frac{3\cos^5 a}{2.4.5} - \frac{3.5\cos^7 a}{2.4.6.7} - \text{cc.}$$

276. Similmente essendo

$$\partial \tan a = \frac{\partial a}{\cos^2 a} = [26] \frac{\partial a}{1 + \tan^2 a}, \text{ sarà}$$

$\partial a = \partial \tan a (1 + \tan^2 a)^{-1}$ E quivi operando come nella 271, fatte le riduzioni si otterrà facilmente;

277. $a = \tan a - \frac{1}{3}\tan^3 a + \frac{1}{5}\tan^5 a - \frac{1}{7}\tan^7 a + \text{ec.}$

278. Con le serie 273. 275. 277. viene espresso l'arco a nelle sue funzioni. Giova ora trovare ciascuna funzione espressa per mezzo dell'arco medesimo.

279. Si applichi alla serie 273 il metodo inverso delle serie, e dopo qualche fatica si troverà

$$\text{sen } a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{ec.}$$

280. Ora si rifletta che

$$\cos a = \sqrt{(1 - \text{sen}^2 a)} = (1 - \text{sen}^2 a)^{\frac{1}{2}}.$$

Fatto dunque il quadrato della serie precedente, sottratto da 1, e quindi estratta la radice per mezzo della formola del binomio, cioè elevandola alla potenza $\frac{1}{2}$, si avrà

281. $$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \text{ec.}$$

282. Onde la serie esprimente il seno verso

$$\text{sen } v.\ a = \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{2.3.4} + \frac{a^6}{2.3.4.5.6} - \text{ec.}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{a^2}{3.4} + \frac{a^4}{3.4.5.6} - \text{ec.}\right)$$

283. Dividendo colle regole algebriche la serie del sen a per l' altra del cos a si avrà $\frac{\text{sen } a}{\cos a}$, cioè

$$\tan a = a + \frac{a^3}{3} + \frac{2a^5}{3.5} + \frac{17a^7}{3^2 5.7} + \frac{62 a^9}{3^2 5.7.9} + \text{ec.}$$

284. Si osservi in questa serie che se $a < 90$, essendo positivi tutti i suoi termini, la loro somma darebbe tan $90 = \infty$, come deve essere. Ma se $a > 90$, non potendosi avere quantità maggiore dell'infinito, la serie diventa divergente, e il valore della tangente immaginario.

285. Si divida colle solite regole dell'algebra l'unità per quest'ultima serie, si avrà

$$\cot a = \frac{1}{a} - \frac{a}{3} - \frac{a^3}{3^2 5} - \frac{2a^5}{3^3 5.7} - \frac{a^7}{3^3 5^2 7}$$
$$- \frac{2a^9}{3^5 5.7.9.11} - \frac{1382 a^{11}}{3^6 5^3 7^2 9.11.13} - \text{ec.}$$

la riduzione dei divisori de' termini di questa serie è un pò fastidiosa, e costa molti tentativi per mettersi in cifre ordinate.

286. Le due serie 273 e 279 mostrano anche la differenza dell' arco sulla sua corda. Essendo la corda di un'arco uguale al doppio seno della metà dell'arco [11] si sostituisca nelle serie $\frac{1}{2} a$ in vece di a, e indi si moltipiichino per 2, e si avrà

$$a - 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2} a = \frac{\text{sen}^3 \frac{1}{2} a}{3} + \frac{3 \text{ sen}^5 \frac{1}{2} a}{4.5} + \frac{3.5 \text{ sen}^7 \frac{1}{2} a}{4.6.7} + \text{ec.}$$

$$a - 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2} a = \frac{a^3}{2.3.2^2} - \frac{a^5}{2.3.4.5.2^4} + \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7.2^6} - \text{ec.}$$

colla prima di queste due serie l'eccesso dell'arco a

sulla sua corda è espressa nel seno dell'arco; colla seconda, nell'arco medesimo.

287. Si noti che sono tutti composti di potenze pari dell'arco a li termini delle serie del *coseno* e del *seno verso*: e che perciò anche quando l'arco a è negativo, il *coseno*, e il *seno verso* si conservano positivi. All'incontro nei termini delle altre l'arco a trovandosi elevato a potenze dispari, il *seno*, la *tangente*, e la *cotangente* cambiano di segno col cambiare del segno nell'arco.

288. Non ci sarà difficile ora calcolare la lunghezza di un'arco in parti del raggio, cioè assegnare l'arco che corrisponde al raggio, disteso esattamente sul medesimo. Si presentano all'uopo molte strade, ma noi faremo uso del sen 30.°

Di fatti sappiamo che sen $30^\circ = \frac{1}{2} r = 0,5$; fatto dunque $a = 30^\circ$, nella serie 273, e sostituito il valore del suo seno nei diversi termini, otterremo

$$\text{Arco } 30^\circ = \text{sen } a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 0,5$$

$$+ \frac{\text{sen}^3 a}{2.3} = \frac{1}{48} = 0,020833$$

$$+ \frac{3 \text{ sen}^5 a}{2.4.5} = \frac{3}{1280} = 0,002344$$

$$+ \frac{3.5 \text{ sen}^7 a}{2.4.6.7} = \frac{5}{14336} = 0,000349$$

$$+ \frac{3.5.7 \text{ sen}^9 a}{2.4.6.8.9} = \frac{105}{1769472} = 0,000059$$

$$+ \frac{3.5.7.9 \text{ sen}^{11} a}{2.4.6.8.10.11} = \frac{189}{17301504} = 0,000011$$

Somma 0,52359

non tenendo conto delle ultime decimali, la cui esattezza è dipendente dalle seguenti non calcolate, si trova l'arco di $30^\circ = 0,52359$ pel raggio $= 1$: se il raggio fosse un numero r, l'arco di 30° sarebbe $r \times 0,52359$.

Colla serie 277 il calcolo sarebbe riuscito assai più breve.

289. Trovato l'arco di 30° nella supposizione del raggio $= 1$, e calcolando un maggior numero dei termini della serie, si ha facilmente

$$\text{Arco di } 90^\circ = 1,5707963 +$$
$$\text{di } 180^\circ = 3,1415926 +$$
$$\text{di } 360^\circ = 6,2831853 +$$

il segno $+$ in fine delle cifre indica che le altre che possono mettersi appresso spingono di più l'approssimazione.

290. Onde siegue il rapporto del diametro alla circonferenza; cioè

$$2r : \varpi :: 1 : 3,14159265358979323846 +$$

arrestandosi a venti decimali.

291. Se poi si facci $6,28318 + : 360^\circ :: 1 : r^\circ$ si troverà che l'arco uguale al raggio è di

$$57^\circ,2957795130823 2 + = 57^\circ.17'.44'',806 24697 +$$
$$= 3437', 7467707 + = 206264'', 8062469 +$$

che sono li valori numerici del raggio espresso in gradi, o in minuti, ovvero in secondi.

292. Fatto il raggio $= 1$, l'arco uguale al raggio sta ad un'arco qualunque, come l'unità, o il raggio, al valore dell'arco espresso in parti dell'unità.

Si denota per r°, r', r'', l' arco uguale al raggio espresso in gradi, in minuti, o in secondi. Onde si

avrà l'arco di n gradi $= n \times \frac{1^\circ}{r^\circ}$; l'arco di n minuti $= n \times \frac{1'}{r'}$; e l'arco di n secondi $= n \times \frac{1''}{r''}$.

293. Ne siegue che per ridurre una quantità lineare in gradi, in minuti, o in secondi essa va moltiplicata per r°, per r', o per r''. E che all' incontro per ridurre i gradi, i minuti, i secondi di un'arco in parti del raggio bisognerà dividerli in corrispondenza per r°, per r', o per r''. Queste riduzioni essendo frequentissime ne diamo qui li logaritmi con dieci decimali.

294. Log. $r'' =$ log. $206264'',8 + = 5.3144251\ 332$

295. Log. $r' =$ log. $3437',7 + = 3.5362738\ 828$

296. Log. $r^\circ =$ log. $57^\circ,2 + = 1.7581226\ 324$

297. Onde volendo esprimere in parti del raggio l'arco di $1''$ si troverà

$$\frac{1''}{r''} = \frac{1''}{206264'',8} = 0,000004848 \text{ parti del raggio;}$$

valore il quale, dentro i limiti della più gran precisione, è quello del seno di $1''$;

onde $$\frac{1''}{\text{sen } 1''} = 206264'',8 +$$

298. Onde i complementi aritmetici dei log r'', log r', log r° saranno li log sen $1''$, log sen $1'$, log sen 1°.

Log. sen $1'' = 4.6855748\ 668$

Log. sen $1' = 6.4637261\ 172$

Log. sen $1^\circ = 8.2418773\ 676$

299. Non si può introdurre r'' (e così r', r°) nelle

formole senza elevarlo alla stessa potenza della quantità che si vuol ridurre: perchè se per ridurre li secondi dell'arco a in quantità lineari si deve fare $\frac{a}{r''}$, è chiaro che non vi sarà omogeneità se per ridurre a^2, a^3 ec. non si facci $\frac{a^2}{(r'')^2}$, $\frac{a^3}{(r'')^3}$ ec.

E all'incontro se per ridurre in secondi la quantità lineare m si dovrà fare mr'', per ridurre m^2, m^3, ec., si dovrà fare $m^2(r'')^2$, $m^3(r'')^3$, ec.

300. Secondo il bisogno si esprimonò li piccoli archi in secondi oppure in decimali del raggio: è la stessa cosa: perchè tanto è dire, arco di $1''$, cioè $\frac{1}{1296000}$ della circonferenza, quanto $\frac{1}{206264,8}$ del raggio. Dapoicchè una circonferenza sta a $1296000''$ nel rapporto di 1 a $206264'',8$.

301. Essendo le funzioni circolari parti del raggio, supposto questo $= 1$, quando esse moltiplicano o dividono una quantità, si devono considerare come fattori della quantità espressi in frazioni decimali. Così $40''$ *sen* 30° non significa altro, che $40''$ moltiplicato per $0,5 = 20''$: perchè *sen* $30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$.

302. Così deve esser considerata l'espressione [18] $\tan C = \frac{AB}{AC}$, la quale si riduce a quest'altra

$AC \tan C = AB = r\ AB$ dove fu fatto $r = 1$. La tan C essendo un rapporto col raggio r, sarà una frazione decimale dell'unità se $C < 45^\circ$ [36], e sarà un'intiero più una frazione decimale se $C > 45^\circ$.

303. Nell'equazioni che esprimono de' rapporti è molto interessante per semplificare i calcoli la scelta delle unità. Perchè la stessa quantità espressa in fra-

zione può riferirsi ad unità differenti delle quali le parti siano differenti. Il movimento di $1''$ se si riferisce al movimento diurno che è di 24 ore, ne sarà $\frac{1}{86400}$; ma se si riferisce al movimento orario, perchè questo ne è 24 volte minore, ne sarà $\frac{1}{1440}$ Così pure una linea è $\frac{1}{144}$ del piede, cioè è $0'',006944$: ma rispetto al pollice è $\frac{1}{12} = 0,08333$.

304. In conseguenza di ciò si fa la lunghezza assoluta dell'arco infinitamente piccolo uguale al raggio del cerchio a cui appartiene moltiplicato per il numero de' secondi dell' angolo che misura. Perchè è chiaro che la lunghezza assoluta di quest'arco è nella ragione composta della lunghezza del raggio e dell'angolo di cui è misura. Sia l' arco piccolissimo a appartenente al raggio r, misura dell' angolo A: si facci $r = 10$ piedi, l' arco a di un pollice, e l' angolo A di 2 minuti; esprimendo sempre li raggi in piedi, gli archi in pollici, e gli angoli in minuti, sarà sempre vero che $a = r A$. Onde se sia $r' = 30$ piedi ed $A' = 6'$ sarà $r A : a :: r' A' : a' = 9$ pollici.

305. Sia ora l'arco infinitesimo a espresso in parti del raggio di modo che venga $\frac{a}{r} = sen\ A$. Ma perchè il seno di un piccolo angolo è uguale all'arco corrispondente; si avrà lo stesso rapporto se l'angoletto A si compari coll' arco uguale al raggio. Di fatti sono uguali rapporti $\frac{a}{r}$ e $\frac{A}{57^\circ}$. In questi casi quando per passare all'integrale si fa $A = 360^\circ$ è chiaro che si

mette il doppio del n.° 3,141 + per esprimere la circonferenza, nella quale il raggio o l'arco 57° deve essere l'unità.

306. Così pure nei calcoli delle forze centrali occorrono spazj S, s, velocità V, v, e tempi T, t, da comparare, e si sa che lo spazio S sta allo spazio s nella ragione composta delle velocità rispettive per li tempi. Si ha perciò la proporzione $S : s :: TV : tv$. Ma se per esprimere le unità di spazio di tempo e di velocità, si fa $S =$ un piede, $T =$ un secondo, e $V =$ un piede per secondo, si ottiene $s = tv$, equazione che esprime che quando il tempo t è di 2 secondi, e la velocità di 2'', lo spazio s sarà di 4 piedi. Quest' equazione $s = tv$ mostra dunque il rapporto di s ad S, o sia mostra che $\frac{s}{S} = \frac{tv}{TV}$, supponendo sempre che per esse si esprimino tante frazioni dell'unità che è stata adottata per lo spazio, per la velocità, e per il tempo.

307. Le serie precedenti de' numeri 173 e seguenti ci fanno conoscere quello che si può negligere nei calcoli quando gli archi sono piccoli. Se l'arco a è dato in secondi, per la 179ª sarà sen $a = a - \frac{a^3}{6}$, onde la differenza tra un piccolo arco ed il suo seno non è che la sesta parte del cubo dell'arco. Ma l'arco è una frazione della circonferenza, e il cubo di una frazione è tanto più piccolo quanto minore è il valore di tale frazione; dunque questa differenza, la quale per gli archi infinitesimi è un' infinitesimo di terz' ordine, si può trascurare: e tanto maggiormente sono trascurabili gli altri termini della serie. Onde li seni degli archi piccolissimi si considerano uguali agli archi. Quando l'arco è di un grado la differenza col suo seno

non è ancora che 0,0000009, cioè non arriva ancora al millionesimo del raggio.

308. Se si volesse esprimere in secondi la differenza tra il piccolo arco ed il suo seno bisognerà renderne omogenee le espressioni. Sia $a = 1^\circ = 3600''$ si calcoli $\frac{r''}{a}$ e si avrà a espresso in decimali del raggio. Il suo cubo diviso per 6 darà l'eccesso dell' arco a sul suo seno espresso in decimali del raggio. Volendo ridurre questo eccesso in secondi si moltiplichi per r''; così per l'arco di 1° si troverà $0'',18$. Questo eccesso si trova di $1''$ quando $a = 1^\circ.\ 45'.\ 44''$; e di $5''$ quando $a = 3^\circ.\ 0'.\ 47''$.

309. Dalla 281ª si ha $\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \text{ec.}$, onde il coseno di un piccolo arco differisce dal raggio della metà del quadrato dell'arco medesimo, il quale per gli archi infinitesimi è un'infinitesimo di second'ordine.

310. Sarebbero restate puramente specolative tutte le formole di cui finora ci siamo occupati se esperti e laboriosi calcolatori non avessero formate le tavole de' valori numerici delle funzioni circolari, e dei loro corrispondenti logaritmi. Specie di strumenti, ai quali non meno che alla moderna perfezione degli strumenti meccanici deve l'astronomia li suoi rapidi progressi. Queste tavole dei logaritmi delle funzioni circolari, che sono il vero libro di compagnia degli astronomi, servono in ogni momento, ed è necessario che i giovani se ne rendano l'uso familiare. Sono tra le altre commodissime quelle di Gardiner a sette decimali, disposte e regolate in un volume maneggevole e commodo dal Callet in Parigi, edizione del Didot, e dai PP. Canovai e del Ricco edizione 2ª e 3ª in Firenze.

Come pure le ultime del sig. Santini in Padova, e del sig. Babbage in Londra. Nelle poche occasioni, in cui bisognerà adoperarli colla precisione di dieci decimali vi sono, fatte dopo quelle di Briggs, le altre di Ulacco, riprodotte da Vega in Lipsia nel 1794.

Funzioni degli archi multipli, e delle potenze degli archi semplici.

311. Non sarà difficile ora tessere le formole delle funzioni degli archi *multipli*, e delle potenze delle funzioni degli archi semplici. Noi non ci estenderemo su questa teoria, ma ci contenteremo di indicarne le prime idee.

Si cerchino li valori dei seni dell'arco *multiplo* di a espressi nei seni e coseni.

312. Nella 51ª fatto $b = 2a$ si ha

$$\text{sen } 3a = \text{sen } a \cos 2a + \cos a \text{ sen } 2a, \text{ ma}$$

$\text{sen } a = \frac{\text{sen } 2a}{2 \cos a}$, [66], e $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, [68],

onde $\text{sen } a \cos 2a = \text{sen } 2a \cos a - \frac{\text{sen } 2a}{2 \cos a} =$ $\text{sen } 2a \cos a - \text{sen } a$; sostituendo si avrà

$$\text{sen } 3a = 2 \cos a \text{ sen } 2a - \text{sen } a$$

313. Nella 54ª fatto $b = 2a$ si ha

$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \text{sen } a \text{ sen } 2a$, e perchè $\text{sen } a \text{ sen } 2a =$, [66], $2 \text{ sen}^2 a \cos a =$, [68], $\cos a (1 - \cos 2a) = \cos a - \cos a \cos 2a$, si otterrà

$$\cos 3a = 2 \cos a \cos 2a - \cos a$$

314. Similmente dalla [58] si ha

$\tan 3a = \frac{\tan a + \tan 2a}{1 - \tan a \tan 2a}$, ma, [69], $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2}$

sostituendo e riducendo

$$\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$$

315. Se l' espressione di sen $3a$ si volesse in soli seni senza miscuglio di coseni, si può fare cos a $= \sqrt{(1 - \text{sen}^2 a)}$; ne viene

$$\text{sen}\, 3a = 2 \,\text{sen}\, 2a \sqrt{(1 - \text{sen}^2 a)} - \text{sen}\, a$$

316. Sia $b = 3a$ si avrà
sen $4a$ = sen a cos $3a$ + cos a sen $3a$, ma, [88], cos $3a$ sen $a = \frac{1}{2}$ sen $4a - \frac{1}{2}$ sen $2a$, sostituendo, riducendo, e moltiplicando per 2

$$\text{sen}\, 4a = 2 \cos a \,\text{sen}\, 3a - \text{sen}\, 2a$$

317. Con sostituzioni analoghe si avrà

$$\cos 4a = 2 \cos a \cos 3a - \cos 2a$$

318. Con altre sostituzioni si otterranno le espressioni delle potenze delle funzioni dell' arco a. Per esempio, [71], $\text{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$, onde $\text{sen}^3 a =$ $\text{sen}\, a \left(\frac{1 - \cos 2a}{2}\right) = \frac{1}{2}$ sen $a - \frac{1}{2}$ cos $2\, a$ sen a, ma [88] $\frac{1}{2}$ cos $2\, a$ sen $a = \frac{1}{4}$ sen $3a - \frac{1}{4}$ sen a, dunque

$$\text{sen}^3 a = \tfrac{3}{4} \,\text{sen}\, a - \tfrac{1}{4} \,\text{sen}\, 3a$$

319. Con mezzi analoghi avremo

$$\cos^3 a = \tfrac{3}{4} \cos a + \tfrac{1}{4} \cos 3a$$

320. Come pure

$$\text{sen}^4 a = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2} \cos 2a + \tfrac{1}{8} \cos 4a$$

321. $\cos^4 a = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2a + \frac{1}{8} \cos 4a$

Del resto a tenore delle espressioni che si sostituiscono si trovano diversi valori della stessa quantità, che possono adoperarsi secondo il bisogno.

322. Se nelle serie, [279], [281], [283], all'arco a

si sostituisca l'arco na si ottengono le serie generali che danno il valore dell'arco multiplo espresso nelle potenze delle funzioni dell'arco semplice. E se nelle formole 121ª e seguenti si mette na in cambio di a, e $(n-2)a$ in vece di b si avranno le funzioni dell'arco multiplo espresse in funzioni di archi multipli minori.

323. Se poi si facci uso dei radicali immaginarj con calcolo più spedito si troveranno le formole per la tangente; come pure le serie che danno le potenze delle funzioni espresse nelle potenze minori, oppure le stesse potenze nelle funzioni semplici degli archi multipli. Ma a causa della eleganza e della facilità, che in molte ricerche analitiche e nella Meccanica Celeste offrono le espressioni dipendenti dai radicali immaginarj, noi finiremo con mostrare l' aspetto che esse danno alle funzioni circolari. In tal genere di calcolo il grande Eulero è stato condotto felicemente dalla considerazione, che una differenziale di area circolare non differisce che del segno sotto il radicale da quella di un area iperbolica, la quale si può esprimere con un logaritmo; e che la prima si riduce alla seconda moltiplicandola per $\sqrt{-1}$. Esteso questo principio, ne sono nate le belle ed utili applicazioni che da lui e dagli altri posteriormente se ne sono fatte, e delle quali si può conoscere l'importanza nelle Note e Commenti alla Meccanica Celeste del La Place del celebre Matematico Americano Nataniel Bowditch. E di fatti la profondità e la chiarezza che spiccano in quest'opera dimostrano, che solo con tali forze analitiche si può commentare l'opera immortale del La Place; e che non si può leggere La Placecon profitto se non quando è unito alle note del Bowditch. L'Italia dovrebbe averne una traduzione.

Espressione delle funzioni circolari nel radicale immaginario.

324. Si sa che qualunque radicale immaginario isolato da quantità reali, viene rappresentato da un fattore reale moltiplicato per $\sqrt{-1}$. E intanto fatta per maggior brevità l'espressione immaginaria $\sqrt{-1}=k$, sarà $k^2=-1$, $k^3=-\sqrt{-1}$, $k^4=1$, $k^5=\sqrt{-1}$, e generalmente $k^{4p}=1$, $k^{4p+1}=\sqrt{-1}$, $k^{4p+2}=-1$, $k^{4p+3}=-\sqrt{-1}$, rappresentando per p un numero intiero qualunque. Si sa altronde che il simbolo $\sqrt{-1}$ ossia k può essere sottomesso a tutte le operazioni comuni dell'algebra. Onde la somma di a con $b\sqrt{-1}$ sarebbe $a+b\sqrt{-1}$, o sia $a+bk$, il prodotto sarebbe abk, il quoziente dividendolo per a sarebbe $\frac{bk}{a}$. Nello stesso modo il prodotto dei binomj $a+bk$ per $c+dk$ è $ac+cbk+adk+bdk^2=ac+bdk^2+(cb+ad)k=ac-bd+(ad+bc)\sqrt{-1}$.

325. Dalla teoria de' logaritmi si ha la serie che esprime un numero n per mezzo del suo logaritmo iperbolico

$$n=1+\log n+\tfrac{1}{2}\log^2 n+\frac{1}{2.3}\log^3 n+\frac{1}{2.3.4}\log^3 n+\text{ec.}$$

e perciò se n è alzata ad una potenza qualunque x si avrà sempre

326. $$n^x=1+\log n^x+\tfrac{1}{2}\log^2 n^x+\frac{1}{2.3}\log^3 n^x+\text{ec.}$$

$$=1+x\log n+\frac{x^2}{2}\log^2 n+\frac{x}{2.3}\log^3 n+\text{ec.}$$

Si facci $n = e$, indicando al solito per e la base dei logaritmi iperbolici, il cui logaritmo essendo uguale all'unità, sarà $\log n = 1$, e perciò

$$327.\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{ec.}$$

e se x è negativo

$$328.\quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{ec.}$$

Si ponga in queste serie $x = a\,k$, esse si trasmuteranno in queste altre

$$329.\quad e^{ak} = 1 + a\,k + \frac{a^2\,k^2}{2} + \frac{a^3\,k^3}{2.3} + \frac{a^4\,k^4}{2.3.4} + \text{ec.}$$

$$330.\quad e^{-ak} = 1 - a\,k + \frac{a^2\,k^2}{2} - \frac{a^3\,k^3}{2.3} + \frac{a^4\,k^4}{2.3.4} + \text{ec.}$$

sottraendo la seconda dalla prima, e dividendo per 2

$$331.\quad \frac{e^{ak} - e^{-ak}}{2} = a\,k + \frac{a^3\,k^3}{2.3} + \frac{a^5\,k^5}{2.3.4.5} + \text{ec.}$$

$$= k\left(a + \frac{a^3\,k^2}{2.3} + \frac{a^5\,k^4}{2.3.4.5} + \text{ec.}\right)$$

si sostituisca $k = \sqrt{-1}$, $k^2 = -1$ ec., avremo.

$$232.\quad \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = \sqrt{-1}\left(a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \text{ec.}\right)$$

dove la serie che forma il secondo membro essendo identica a quella che si è trovata al n.° [279] esprimente il valore di sen a sarà in conseguenza

$$333.\quad \text{sen}\,a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$ e perchè $e^{-a\sqrt{-1}}$

$$= \frac{1}{e^{a\sqrt{-1}}} \text{ sarà } sen\, a = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - 1}{2e^{a\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}$$

334. Nella stessa guisa sommando le 329 e 330 e dividendo per 2,

$$\frac{e^{ak} + e^{-ak}}{2} = 1 + \frac{a^2\, k^2}{2} + \frac{a^4\, k^4}{2.3.4} + \frac{a^6\, k^6}{2.3.4.5.6} + \text{ec.},$$

nella quale sostituendo i valori di k^2, k^4, ec., sarà

$$335.\ \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

in cui il secondo membro è identico alla serie del n.° 280 che esprime il coseno, onde

$$336.\ \cos a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} + 1}{2e^{a\sqrt{-1}}},$$

337. Da questi due valori si ha

$$\tan a = \frac{1}{\sqrt{-1}} \times \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - 1}{e^{2a\sqrt{-1}} + 1},$$ e perciò

$$338.\ \cot a = \sqrt{-1} \times \frac{e^{2a\sqrt{-1}} + 1}{e^{2a\sqrt{-1}} - 1}$$

339. Con la moltiplicazione si trova

$$\operatorname{sen} a \cos a = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - e^{-2a\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$$

oppure $\qquad \operatorname{sen} 2a = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - e^{-2a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

equazione identica colla 333ª.

340. Sommando e sottraendo convenientemente le due equazioni 333 e 336 si trova

$$\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}}$$

$$\cos a - \operatorname{sen} a \sqrt{-1} = e^{-a\sqrt{-1}}$$

341. Dividendo la prima per la seconda di queste

$$e^{2a\sqrt{-1}} = \frac{\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1}}{\cos a - \operatorname{sen} a \sqrt{-1}} = \frac{1 + \tan a \sqrt{-1}}{1 - \tan a \sqrt{-1}}$$

$$= \frac{\cot a + \sqrt{-1}}{\cot a - \sqrt{-1}}$$

342. Oppure

$$e^{a\sqrt{-1}} = \frac{\cos \frac{1}{2} a + \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \sqrt{-1}}{\cos \frac{1}{2} a - \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \sqrt{-1}} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2} a \sqrt{-1}}{1 - \tan \frac{1}{2} a \sqrt{-1}}$$

$$= \frac{\cot \frac{1}{2} a + \sqrt{-1}}{\cot \frac{1}{2} a - \sqrt{-1}}$$

243. Fatti i quadrati di *sen a* e di *cos a*, ridotti allo stesso denominatore, e presa la differenza, si ottiene $\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \frac{2e^{4a\sqrt{-1}} + 2}{4e^{2a\sqrt{-1}}} = \frac{e^{4a\sqrt{-1}} + 1}{2e^{2a\sqrt{-1}}}$

$$= \frac{e^{2a\sqrt{-1}} + e^{-2a\sqrt{-1}}}{2} = (\cos a + \operatorname{sen} a)(\cos a - \operatorname{sen} a)$$

345. Oppure

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$$ ... espressione

di *cos a*, trovata prima.

346. Quanto fin qui si è fatto sembra che sia sufficiente per un preliminare esercizio. Perchè agevolmente ora potranno i giovani da per se, e senza altro ajuto inoltrare il loro studio sia alla maniera di calcolare le tavole trigonometriche: sia all' uso delle funzioni circolari nella risoluzione delle equazioni del 3° e 4° grado, e delle trascendenti: sia alle altre ramificazioni della Goniometria. Per le quali cose potranno pigliare a guida l'Analisi degl'infiniti del grand'Eulero, o il La Croix, o la seconda edizione della Trigonometria del Cagnoli; e intanto passeremo alla Trigonometria.

TRIGONOMETRIA

Nozioni preliminari.

1. Se in una bella notte da un luogo aperto si contempli la volta celeste, ed il suo movimento da oriente in occidente indicato dalle stelle, diversi punti e cerchj naturalmente si presentano all'immaginazione quando ad essi si voglia quel movimento riferire.

Il primo di questi cerchj, al quale tutti gli altri facilmente possono rapportarsi, sarà *l' Orizzonte*, il cerchio terminatore della nostra vista. Essendo simili tutti i cerchj, si può formarne uno materiale di legno o di ottone attorno di noi, diviso in 360 gradi; il di cui centro se sia nell'occhio nostro, li suoi raggi prolungati anderanno nell'*Orizzonte* a segnare un egual numero di gradi. Ci sarà facile così stabilire i punti del medesimo, nei quali si levano, e tramontano gli astri.

2. Il piano di questo cerchio divide la sfera celeste in due emisferi, *superiore*, ed *inferiore*. Nel centro di esso una retta che si elevi perpendicolarmente, anderà ad incontrare il punto della volta celeste più elevato, che si chiama il *Zenit;* e prolungata al di sotto incontrerà il punto opposto, che si chiama *Nadir*.

3. Sia *(fig.4) NESO* l'Orizzonte. Posto l'occhio

nel centro C, si noti il grado al quale corrisponde una bella stella, che li leva in A, e l'altro a cui essa corrisponde quando tramonta in A'. Si notino gli stessi punti sul cerchio $NESO$ per le stelle M, M': e di poi per le altre B, B', P, P', e si tirino delle corde, che uniscano questi punti. Si osserverà. 1° Che queste corde saranno parallele. 2° Che un diametro come NS perpendicolare ad una di esse, sarà perpendicolare a tutte. 3° Che da questo saranno divise in due parti uguali, e le corde, e gli archi corrispondenti ch'esse sottendono. 4° Che se una di queste corde come EO, diverrà diametro, sarà un diametro dell'Orizzonte parallelo alle medesime. 5° Che l'Orizzonte dai due diametri perpendicolari tra di loro NS e OE sarà diviso in quattro parti uguali, ciascuna di 90°. 6° Le estremità di questi diametri saranno i quattro punti cardinali dell'Orizzonte, che si chiamano E, *Est*, o *Oriente*; O, *Ovest*, o *Occidente*; N, *Nord*, o *Settentrione*; S, *Sud*, o *Mezzodì*.

4. L'arco NA si chiama *azzimuto* dell'astro, che nasce in A. Posto in N il zero delle divisioni del nostro cerchio, gli azzimuti si contano da N per E, e per S, ritornando in N. Possono contarsi gli azzimuti da N per E in S, e da N per O in S. Li primi si chiameranno allora azzimuti orientali, gli altri azzimuti occidentali. In questo caso l'azzimuto non può essere maggiore di 180°, mentre nel primo gli azzimuti si contano sino a 360°.

5. L'arco EA si chiama *Amplitudine Ortiva* dell'astro che sorge in A, e il suo corrispondente OA' *Amplitudine Occasa* dello stesso astro che tramonta in A'. Li due archi EA, ed OA' considerati matematicamente sono sempre uguali. Ciascuna di queste amplitudini, se si vuole, può essere *Boreale*, o *Australe*,

secondochè l'arco di amplitudine è verso il Nord, o verso il Sud.

6. Se si elevi un piano perpendicolarmente sull'Orizzonte, il quale lo tagli secondo uno dei diametri dell'Orizzonte medesimo; questo piano taglierà la sfera celeste in due altri emisferi; la sua sezione con la medesima sarà un cerchio uguale all'Orizzonte, che passerà per il Zenit, e per il Nadir; taglierà esso l'Orizzonte in due parti uguali, ciascuna di 180°, e sarà perpendicolare al medesimo. Questo cerchio si denomina *verticale*.

7. Se il verticale taglia l'Orizzonte secondo il diametro *EO* parallelo alle corde del movimento diurno, vien denominato *primario verticale*; se secondo il diametro *NS* perpendicolare alle corde del movimento diurno si denomina *meridiano*; se secondo qualunque altro diametro, s'indica secondo quel grado di azzimuto nel quale taglia l'Orizzonte: così verticale di 20°, di 50°, sono quelli che tagliano l'Orizzonte a 20°, e 50° di azzimuto.

8. Li piani di tutti i verticali hanno dunque per sezione comune la linea, che unisce il Zenit al Nadir, e che passa pel centro della sfera perpendicolarmente all'Orizzonte.

9. L'inclinazione reciproca di questi piani è uguale dunque all'inclinazione dei diametri dell'Orizzonte per li quali passano, perchè questi diametri sono perpendicolari alla loro sezione comune. L'arco dell'Orizzonte, dunque, che misura gli angoli che fanno tra loro i diametri, misura ugualmente l'inclinazione di questi piani.

10. Essendo il Zenit, ed il Nadir l'estremità della sezione comune dei verticali, questi due punti saranno sulla sfera celeste a 180° l'un dall'altro. Il diametro

della sfera che li unisce si chiama *asse dell' Orizzonte*; li punti estremi di quest'asse si chiamano i *poli* dell'Orizzonte, li quali perciò corrispondono al Zenit, ed al Nadir; e a 90° da questi due punti li verticali saranno intersecati dall'Orizzonte.

11. Essendo l'asse dell'Orizzonte la linea d' intersezione dei verticali, ed essendo uguali i diametri dell'Orizzonte, e di un verticale qualunque, perchè diametri della sfera celeste, l'arco di un verticale frapposto tra il Zenit e l'Orizzonte sarà di 90°. Questi archi dunque saranno tutti perpendicolari all'Orizzonte.

12. La porzione, o arco del verticale frapposto fra il Zenit, e un astro si chiama *distanza zenitale* dell'astro; il suo complemento a 90° dicesi *altezza* dell'astro, e indica il numero dei gradi che si contano dall'Orizzonte all'astro. L' altezza dunque è sempre complemento a 90° della distanza zenitale.

13. Se s'immagini un cerchio parallelo all' Orizzonte, il suo piano sarà perpendicolare all' asse del medesimo; ma non passando pel centro della sfera, la dividerà inegualmente; sarà quindi il suo diametro minore di quello dell'Orizzonte, e tanto minore, quanto il cerchio a cui appartiene sarà più distante dal medesimo. Si possono concepire infiniti di questi cerchj minori tra l'Orizzonte, ed il Zenit, o tra l'Orizzonte, ed il Nadir.

14. Questi cerchj minori paralleli all'Orizzonte si chiamano *almicantarat*; sono dai verticali secati in porzioni simili alle parti corrispondenti dell'Orizzonte, e gli astri, che sono nell'istesso almicantarat, hanno l'istessa altezza.

15. Il verticale, cui abbiamo denominato meridiano (§ 7) divide la sfera in due emisferi, l'uno orientale, e l'altro occidentale. Esso divide in due parti

uguali il corso visibile degli astri: perchè dividendo in due la corda del loro arco visibile, e restando perpendicolare all' Orizzonte, resta egualmente distante dai punti A, ed A', B, e B' del nascere, e del tramonto. Il piano del meridiano dunque passa pei centri di questi archi. Non può adunque confondersi con alcuno altro verticale.

16. Si sa che gli astri in 24 ore, fanno il loro intero corso, conservando sempre la loro rispettiva distanza; e che può l'intiera sfera celeste considerarsi girare su di un asse in 24 ore, e seco trasportare le stelle ad essa invariabilmente attaccate. Descrivono dunque le stelle delle circonferenze di cerchio grandi, o piccole, li cui diametri sono perpendicolari all'asse di rotazione, e vanno crescendo quanto più s'avvicinano al centro della sfera. Li loro piani sono dunque paralleli tra di loro.

17. Quello di questi cerchj il cui piano passa pel centro della sfera, ha l'istesso diametro della sfera, (non altrimenti che l'Orizzonte, e il meridiano), e chiamasi *equatore*. Gli altri minori diconsi *paralleli*.

18. L'equatore dividerà quindi la sfera in due emisferi, dei quali si chiama *Boreale*, quello che contiene il polo boreale, *Australe* l'altro.

19. Se si fanno passare per li due poli dell'equatore degli altri piani su di esso perpendicolari avranno essi la loro sezione comune nell'asse di rotazione, e la loro inclinazione sarà misurata dagli angoli formati dai raggi dell'equatore giacenti nei medesimi. Li gradi dell' equatore, che misurano questi angoli, misurano quindi l'inclinazione di questi piani.

20. Li cerchj, che terminano questi piani nella volta celeste, saranno dunque tutti uguali, perchè di ugual diametro; e saranno perpendicolari all' equa-

tore medesimo. E gli archi di essi frapposti tra l'equatore, e ciascuno dei due suoi poli, saranno di 90°. Questi cerchi si chiamano di *declinazione*, o *orarj*: e tagliano l'equatore, e li cerchj minori paralleli al medesimo in parti omologhe.

21. L'arco del cerchio di declinazione frapposto tra l'astro, e l'equatore, dicesi, *declinazione* dell'astro; e si denomina, o *Boreale*, o *Australe*, secondo che l'astro è al Nord, o al Sud dell'equatore. Il suo complemento a 90° sarà la distanza dell'astro dal polo che dicesi anche *codeclinazione*.

22. Gli astri, che sono sopra uno stesso parallelo, hanno l'istessa declinazione.

23. La declinazione è sempre uguale alla differenza positiva tra la distanza dal Zenit dell'astro, e l'altezza del polo dell'equatore quando l'astro è al Sud del Zenit: uguale alla somma della distanza zenitale, e della altezza del polo, se l'astro è tra il Zenit, ed il polo: uguale al complemento di tal somma a 180° se l'astro è sotto il polo.

24. Generalizzando a qualunque sfera di qualsivoglia diametro le considerazioni precedenti su gli archi e cerchj descritti nella volta celeste, e applicandovi le proprietà geometriche del piano, e del circolo si è formata la Trigonometria Sferica.

Proprietà generali de' cerchj sulla sfera.

25. Gli antichi avevano scritto molti trattati, dei quali a noi non sono pervenuti, che i teoremi di Tolomeo, il trattato di Menelao, e l'altro di Teodosio il più completo di tutti. Li 14 libri scritti da Ipparco, e che son perduti forse, sono gli stessi lasciatici da Tolomeo come suoi, il quale per altro si di-

menticava qualche volta di svelare le fonti dai quali attingeva le cose che ci tramandò, come lo dimostra il catalogo d'Ipparco da lui accomodato per se e dato come suo. I moderni, che hanno di molto rese più semplici le antiche teorie, coll'ajuto dell'analisi introducendo l'uso delle tangenti, hanno dato tutto il rigor convenevole, ed hanno semplificato questa essenzialissima parte delle metematiche.

26. Si può sempre supporre una sfera divisa in due parti uguali da un piano che passa pel suo centro. Il circolo, che esso traccia alla superficie ha per centro, e per raggio, il centro, e il raggio stesso della sfera, e questo si chiama *circolo massimo*. Dunque

1° Tutti li circoli tracciati alla superficie della sfera, che hanno per raggio il raggio stesso della sfera, sono circoli massimi.

2° Li circoli massimi son tutti uguali.

3° I circoli massimi possono essere in tanto numero, quanti diametri si possono tirare in una sfera.

27. Un diametro della sfera perpendicolare al piano del cerchio massimo si chiama *asse* del medesimo; e i punti estremi dell'asse si chiamano *poli* del circolo massimo,

Si concepisca un semicerchio massimo qualunque, come BDB' (*fig.5*) perpendicolare nel piano della figura, il cui diametro sia BB', e il cui centro sia C. Perpendicolarmente al diametro BB', e al piano del cerchio BDB' pel centro C, si alzi la retta CE, che perciò sarà un raggio della sfera perpendicolare al cerchio massimo BDB', questo ne sarà l'asse.

28. Se un'altro piano si alzi perpendicolare sul primo, che pur esso passi pel centro della sfera; questo traccerà un' altro circolo massimo, un diametro

del quale sarà l'asse del primo, ed i poli del primo saranno nel piano del secondo. E reciprocamente i poli, e l'asse del secondo saranno nel primo. Dunque

Se due circoli massimi sono reciprocamente perpendicolari, l'asse dell'uno è diametro dell' altro, e ciascuno di loro passa per i poli dell'altro.

29. Essendo il punto E in una perpendicolare che passa pel centro del circolo BDB', esso resta egualmente distante da tutti i punti della circonferenza medesima. Dunque le distanze $B'E$, BE sono uguali; ma esse sono corde degli archi $B'E$, BE; dunque anche gli archi sono uguali; e per essere $B'EB$ una semicirconferenza, saranno gli archi $B'E$, BE di 90°. Dunque

1° Il polo è sempre 90° distante da ogni punto del suo circolo massimo.

2° Due circoli massimi non possono avere li medesimi poli.

3° Due archi perpendicolari ad un terzo, o un solo arco di 90° perpendicolare ad un'altro, o due archi di 90°, determinano il polo del terzo arco.

30. Tre punti non posti in linea retta, determinano la posizione di un piano. Dunque pel centro della sfera, e per due punti presi nella superficie, che non siano l'estremità di un diametro, non si può far passare, che un solo piano. Dunque

Per due punti presi sulla superficie della sfera, e non posti a 180° l'uno dall'altro, non si può far passare, che un circolo massimo.

31. La linea d' intersezione dei piani dei circoli massimi passando pel centro della sfera, sarà egualmente diametro e dei circoli e della sfera; ne divi-

derà dunque in due parti uguali la circonferenza. Dunque

1° I circoli massimi si tagliano scambievolmente in due punti distanti sempre di 180° l'un dall'altro.

2° Due archi di cerchj massimi non possono essere paralleli.

3° Due archi di 180° possono racchiudere una superficie sferica. La superficie racchiusa tra due archi di 180°; si chiama *fuso*.

32. Perpendicolari all'asse di un circolo massimo, possono immaginarsi infiniti piani, li quali traccieranno sempre sulla sfera dei circoli tanto più piccoli, quanto più questi piani saranno vicini al polo; e poicchè ogni sezione di essi è parallela al piano del circolo massimo, saranno questi cerchj, che diconsi cerchj *minori*, anche essi *paralleli* al medesimo. Dunque

1° Li centri dei cerchj minori paralleli ad un circolo massimo, sono tutti nell' asse del medesimo.

2° Li piani dei cerchj minori paralleli ad un circolo massimo sono perpendicolari sull'asse del medesimo.

3° Sono più piccoli quei cerchi minori, che più si allontanano dal centro della sfera; o dal cerchio massimo a cui son paralleli.

4° Due cerchj minori sono uguali se hanno i loro centri egualmente distanti dal centro della sfera, o dal cerchio massimo a cui son paralleli.

33. Li poli dei cerchj minori sono gli stessi del circolo massimo a cui sono paralleli; e tutti i punti di ciascuno di essi sono egualmente distanti dall'uno, e dall'altro polo.

Sia C (*fig.6*) il centro della sfera, ACB l'angolo di due raggi, AFB l' arco di cerchio massimo che passa per i punti A, e B, misura naturale dell'angolo ACB. Se un'arco di cerchio minore passa per questi due punti come sarebbe AEB, questo secondo conterrà un maggior numero di gradi del primo. Perchè essendo nelle figure simili le parti omologhe proporzionali, starà AFB misura naturale dell'angolo ACB al suo raggio AC, come l'arco AEB misura naturale dell'angolo ADB al suo raggio AD. Ma l'angolo ADB è maggiore dell'angolo ACB, perchè ambidue insistono sulla stessa corda AB, dunque l' arco AEB, che lo misura, contiene un maggior numero di gradi dell'arco AFB misura del secondo. Dunque

1° Se presi due punti su di una sfera si tirino ad essi due raggi; l' angolo da questi fatto nel centro della sfera sarà misurato dall'arco di cerchio massimo che li unisce su la sfera.

2° Se presi due punti su di una sfera si faccino passare per essi due archi di cerchj disuguali, il maggiore sarà quello, che avrà un raggio minore.

3° L'arco di circolo massimo è il più breve, che possa condursi da un punto all'altro sulla superficie di una sfera: misura esso dunque tra i punti medesimi la loro distanza, che dicesi pure *distanza angolare*.

4° L'arco di circolo massimo, perchè dipendente dal raggio della sfera, è la misura costante ed unica di ogni distanza sferica.

5° La variabilità dei cerchj minori li rende quasi inutili nella Trigonometria; essi non po-

tendo servire per misura uniforme e comune non si adoperano, che in casi particolari: e riducendone gli archi ai corrispondenti sul circolo massimo.

35. L'angolo *ACB*, (*fig.6*) essendo sempre minore di 180° l'arco *AFB* riesce anche esso minore di 180°; ma se si pigli il suo supplemento a 360°, il supplemento dell' arco *AEB* sarà tanto minore di quello dell' arco *AFB*, quanto l'arco stesso *AEB* è maggiore di *AFB*. Dunque

Se due archi maggiori di 180° appartenenti a cerchi disuguali passino per due punti sulla sfera; sarà maggiore quello, che avrà il maggior raggio.

36. *Angolo sferico* si chiama l'inclinazione scambievole di due archi sulla superficie della sfera considerata nel punto in cui s' incontrano. Essa è sempre la stessa che quella dei loro piani. La sua grandezza non dipende affatto da quella degli archi, che lo formano. Così l' angolo *BAH* (*fig.7*) è lo stesso che *EAF*, sebbene gli archi che li formano siano di varia lunghezza.

37. L' inclinazione di due cerchj massimi, o sia l' angolo che essi fanno, è misurato dall'arco fra essi intercetto del solo cerchio massimo, il cui piano è perpendicolare alla loro comune sezione.

Sia il fuso *AFBGA* (*fig.8*) formato da due cerchj massimi, che si segano secondo il diametro *AB* della sfera. Sia *FG* l' arco del cerchio massimo il di cui piano è perpendicolare al diametro *AB*: dividerà esso in due parti uguali i semicerchj *AFB*, *AGB*. Qualunque altr'arco di circolo massimo fra di essi intercetto, come *ED*, non essendo perpendicolare alla comune sezione, non può misurare l'inclinazione dei loro piani. Dunque

1° Un angolo sferico ha per misura l'arco di cerchio massimo compreso fra i suoi lati (prolungati se si bisogna) a 90° di distanza dal suo vertice.

2° Il vertice di un'angolo sferico è sempre polo dell'arco che lo misura.

3° L'angolo sferico formato di due archi di cerchj massimi è uguale all'altro, che essi formano con la loro riunione a 180° di distanza.

38. Siano (*fig.7*) MA, NA le tangenti rispettive degli archi BA, HA, nel loro punto d'incontro A. Essendo esse di loro natura perpendicolari al raggio comune CA, ed essendo nei piani stessi degli archi, l'angolo ch'esse fanno sarà uguale all'angolo dei due raggi CB, CH: sarà perciò misura dell'inclinazione dei piani, e quindi degli archi stessi. Dunque

L'angolo rettilineo formato dalle tangenti di due archi nel punto del loro incontro è uguale all'angolo sferico formato dagli archi stessi.

39. L'angolo rettilineo formato dalle corde degli archi BA, HA, essendo sempre minore dell'angolo al centro BCH, perchè il primo con lati maggiori insiste sulla corda stessa dell'arco BH: e l'angolo BCH essendo misura dell'angolo sferico BAH, sarà sempre l'angolo BAH formato dagli archi maggiore del corrispondente formato dalle loro corde. Dunque

L'angolo sferico è sempre maggiore del rettilineo formato dalle corde degli archi stessi.

40. Se un'angolo sferico è di 90°, l'arco che lo misura sarà di 90°. Saranno dunque nella sfera tre piani di tre archi, appartenenti a tre circoli perpendicolari l'uno all'altro. Dunque le linee d'intersezione sono perpendicolari l'uno all'altro. Dunque i poli di ciascun di loro, saranno nella comune sezione degli altri due. Dunque l'asse di ciascuno sarà pure nella comune sezione degli altri due.

41. Essendo gli assi perpendicolari ai piani dei circoli, e i poli essendo i punti estremi dell'asse. Perciò

L'arco, che misura la distanza di due poli, misura ancora l'inclinazione dei circoli massimi a cui appartengono.

42. Poicchè un piano che cade su di un'altro fa due angoli uguali a due retti, e s'è prolungato fa quattro angoli uguali a quattro retti. Dunque

1° Un'arco che cade su di un'altro fa due angoli uguali a due retti.

2° Un' angolo sferico è sempre minore di 180°.

3° La somma degli angoli formati intorno ad un punto dall'intersezione di due cerchj è di 360°.

4° Se due archi si tagliano in un punto, gli angoli opposti al vertice sono uguali.

5° Due archi di cerchio massimo nelle loro due intersezioni a 180° formano quattro angoli uguali fra di loro, ed altri quattro angoli, pure uguali tra di loro, che sono supplementi dei primi.

43. Si è detto, che bastano due archi di 180° per racchiudere una superficie sferica. In ogn'altro caso è necessario che un terzo arco intersechi comunque i due primi. Sia il fuso *(fig. 8)* *AFBGA*; per chiudere una superficie sferica (fuori del solo caso, in cui *AFB*, e *AGB* siano di 180°) bisogna, che un terzo arco, come *DE*, o come *HL* intersechi i due primi, e nascerà il triangolo sferico *DAE*, o pure *HAL*. Dunque

Un lato di un triangolo sferico è sempre minore di 180°.

44. Essendo l'arco che passa fra un punto ed un altro la più breve distanza fra i due punti. Dunque

La somma di due lati d' un triangolo sferico è sempre maggiore del terzo.

45. Rapporto al triangolo DAE, si ha : $BD + BE = 180^\circ - AD + 180^\circ - AE = 360^\circ - AD - AE$. Ma $DE <= BD + BE$. Dunque $DE < 360^\circ - AD - AE$. Dunque $DE + AD + AE < 360$. Ma DAE rappresenta un triangolo qualunque. Dunque

La somma dei tre lati d' un triangolo sferico è sempre minore di 360°.

46. Ciascun angolo d' un triangolo sferico è maggiore del rettilineo formato dalle corde degli archi; ma la somma dei tre angoli d' un triangolo rettilineo è uguale a 180°. Dunque

La somma dei tre angoli d'un triangolo sferico è maggiore 180°.

47. Ciascun angolo sferico è sempre minore 180°. Dunque

La somma dei tre angoli d'un triangolo sferico non può essere maggiore di 540°.

48. Siegue da tutto ciò, che in un triangolo sferico, e angoli, e lati possono essere, o tutti minori, o tutti uguali, o tutti maggiori di 90°.

49. Poicchè la distanza angolare di due punti della sfera è determinata dall'arco di cerchio massimo frapposto tra di loro ; e che la grandezza degli angoli sferici non dipende dalla lunghezza degli archi, che li formano, ed è misurata dall'arco intercetto a 90° dal vertice : ne siegue, che coincideranno due triangoli sferici soprapposti l'uno all'altro, sia che abbiano uguali rispettivamente i tre lati, o i tre angoli. Dunque

Due triangoli sferici sono uguali

1° Se hanno uguali rispettivamente i tre lati.

2° Se hanno uguali rispettivamente i tre angoli.

3° Se hanno uguali due lati, e l'angolo con-

tenuto, perchè il terzo lato coinciderà col terzo dell'altro.

4° Se hanno uguali un lato e i due angoli adjacenti ai medesimi, perchè il terzo angolo risulterà da una uguale inclinazione dei lati rispettivi.

50. Sia il triangolo ABC (*fig*. 9) nel quale siano uguali i due lati AB, ed AC. Si tirino ad arbitrio gli archi BE, CO in modo che su i lati uguali taglino le parti uguali AO, e AE. Li triangoli ABE, e ACO, perchè hanno rispettivamente uguali un angolo, e due lati, saranno uguali. Dunque saranno uguali i lati omologhi BE, CO. Dunque sono uguali i triangoli BCO, CBE. Dunque gli angoli omologhi ECB, OBC sono uguali. Ma questi angoli nel triangolo ABC sono opposti ai lati uguali. Dunque

1° Se un triangolo sferico è isoscele, gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.

2° Se un triangolo sferico è equilatero sarà pure equiangolo.

51. Si suppongano ora nel triangolo ABC uguali gli angoli ABC, ACB, e si tirino i due archi BE, e CO su i lati opposti in modo, che $BO=EC$. Li due triangoli OCB, e EBC saranno uguali. Dunque gli angoli BCO, EBC saranno uguali. Dunque saranno pure uguali i loro residui OCA, EBA. Dunque i due triangoli OCA, EBA sono uguali. Dunque i lati omologhi OA, EA sono uguali. Dunque $AE+EC=AC$ sarà uguale ad $AO+OB=AB$: ma questi sono i lati opposti agli angoli uguali. Dunque.

1° Se un triangolo sferico ha due angoli uguali sarà isoscele.

2° Un triangolo sferico equiangolo è pure equilatero.

52. Nel triangolo BAC (*fig. 10*) sia ora l'angolo $BAC > B$, e per mezzo dell'arco AD si faccia BAD uguale B. Sarà $AD = BD$. Dunque $BC = BD + DC$. Ma $AD + DC > AC$. Dunque $BC > AC$: ma BC è opposto a BAC, ed AC a B. Dunque

In ogni triangolo sferico il maggior lato è opposto al maggior angolo, e il minor lato al minor angolo.

53. Sia un triangolo sferico qualunque ABC (*fig 11*) li cui lati per più facile intelligenza si suppongano minori di 90°. Poicchè ogni angolo sferico è polo dell'arco di cerchio massimo tirato a 90° dal medesimo, ed ha per misura l'arco di questo frapposto tra i suoi lati prolungati se bisogna: se fatto polo in A si descriva l'arco di cerchio massimo DE a 90°, e se ne prolunghino i lati AB, AC sino all'incontro in M, ed N; gli archi AM, ed AN saranno di 90°; e l'arco MN sarà uguale all'angolo BAC. Nello stesso modo, e successivamente fatti poli in B, e in C si tirino EF, ed FD, e si prolunghino i lati del triangolo rispettivamente sino al loro incontro.

Ne nasce da questa costruzione un nuovo triangolo DFE, che chiamasi *Supplementario*, o *Polare*, perchè li suoi tre lati hanno i poli nei vertici A, B, C del primo triangolo; e a vicenda li suoi tre vertici D, E, F sono poli dei lati del triangolo primitivo. In fatti gli angoli M, ed O sono retti, dunque gli archi EO, ed EM sono di 90°, e si tagliano nel polo di MO o sia di AB.

Gli angoli P, ed R sono retti. Dunque $PF = RF = 90°$; dunque F è polo di PR, o di BC.

Gli angoli Q, ed N sono retti. Dunque $DQ = DN = 90°$. Dunque D è polo di QN, o di AC.

Ora l'angolo F è misurato dall'arco $PR = CP + BR - BC = 180° - BC$. L'angolo D è misurato

dall'arco $NQ = AN + CQ - AC = 180° - AC$.
L'angolo E è misurato dall'arco $MO = AM + BO - AB = 180° - AB$.

Dunque gli angoli del triangolo polare sono rispettivamente supplementi dei lati del triangolo primitivo.

In simile guisa

$$EF = EO + RF - OR = 180° - OR = 180° - B$$
$$DE = DN + ME - MN = 180° - MN = 180° - A$$
$$DF = PF + DQ - PQ = 180° - PQ = 180° - C$$

Dunque i tre lati del triangolo polare, sono rispettivamente supplementi dei tre angoli del triangolo primitivo.

Questo triangolo non è indispensabile nella Trigonometria; ma vedremo quali non piccoli servizj esso appresta per facilitare la risoluzione dei triangoli sferici.

Abbiamo creduto di dover estenderci nei primi elementi sinora esposti della Trigonometria sferica, perchè il più delle volte per mancanza di essi i principianti operano più tosto per meccanismo, che per intelligenza.

Teoremi fondamentali per la risoluzione de' triangoli rettilinei.

54. Fra le infinite maniere onde può chiudersi con tre lati uno spazio, tre sole sono generalmente considerate, e danno luogo a tre distinte Trigonometrie: cioè la Trigonometria rettilinea, la sferica, e la sferoidica. Quest' ultima contiene come caso particolare la sferica, supponendo, cioè, uguali gli assi d'una elissoide, essa diventa una sfera. E la sferica contiene come caso particolare la rettilinea; supponendo, cioè, il raggio infinito, la superficie sferica si spiana, ed

i triangoli diventano rettilinei: o pure non contemplando che le sole corde degli archi nasce la Trigonometria rettilinea. Si dovrebbe quindi procedere dalla Trigonometria sferoidica alla sferica, e da questa alla rettilinea: ma il metodo inverso, perchè progredisce dal semplice al composto, riesce più facile, e piano.

55. Presi a piacere tre punti sopra una sfera, purchè non siano su di un cerchio massimo, si possono congiungere, o con archi di cerchio massimo, o con archi di cerchj minori, o con le corde di questi archi. Nei primi due casi si forma un triangolo sferico, nell'ultimo un triangolo rettilineo. Nella Trigonometria sferica si contemplano solamente i triangoli formati da archi di cerchio massimo: e dove occorrono archi di cerchj minori, essi o si eliminano, o si riducono ai primi: la varietà indeterminata de' loro raggi rendendoli eterogenei, non possono riferirsi che a quelli, che nella sfera comunque giacciono, hanno sempre lo stesso raggio della sfera, e che quindi sono sempre omogenei. Noi quindi sotto il semplice nome di cerchj, o di archi intenderemo sempre quelli di cerchio massimo.

56. Facendo passare un circolo per i tre vertici del triangolo sferico; il triangolo rettilineo formato dalle corde del corrispondente triangolo sferico resterà iscritto nel circolo, che è un circolo minore; e i suoi lati, perchè sono corde degli archi di questo circolo, che essi sottendono, sono nel piano del medesimo.

57. Le perpendicolari abbassate dai punti di un cerchio minore, circoscritto al triangolo rettilineo formato dalle corde di un triangolo sferico, formeranno sul piano del circolo massimo che gli è parallelo un cerchio concentrico, (§ 32) nel quale resterà iscritto un triangolo rettilineo uguale all' altro iscritto nel cer-

chio minore, come nella fig. 1 il circolo e il triangolo $A'B'C'$. Onde, § 32, si può nel cerchio massimo iscrivere il triangolo ABC con corde parallele ai lati corrispondenti del primo, e che perciò sarà simile al triangolo $A'B'C'$, ed al triangolo primitivo formato sulla sfera dalle corde del triangolo sferico. Saranno dunque i lati dei triangoli corde degli archi omologhi del cerchio minore, e del cerchio massimo. Ma cerchj e triangoli sono simili; dunque i rapporti considerati nel secondo sono gli stessi che quelli del primo.

58. Ogni angolo iscritto ha per misura la metà dell' arco, che sottende la corda, nella quale insiste l'angolo opposto. Ma le corde sono uguali al doppio seno della metà dell'angolo al centro, e questo è doppio dell'angolo del triangolo. Dunque i lati del triangolo rettilineo sono come i seni degli angoli opposti. Teorema già dimostrato nella *Goniometria* § 14, e al quale ora daremo tutta l'estensione.

Nel triangolo ABC (*fig.* 12) il lato AC è corda dell'arco $AM'C$, sul quale insiste l'angolo opposto B. E l'angolo B ha per misura la metà dell'arco $AM'C$. Ma il lato AC è uguale al doppio seno della metà dell'angolo iscritto B, dunque il lato AC è uguale al doppio seno dell'angolo B. Lo stesso si dimostra degli altri due angoli. Dunque il rapporto di un lato al seno dell' angolo opposto è costante nei triangoli rettilinei; e da questo rapporto noi caveremo tutta intiera la trigonometria rettilinea, e tutta la sferica.

Avremo dunque $\frac{AB}{\text{sen}\,C} = \frac{BC}{\text{sen}\,A} = \frac{AC}{\text{sen}\,B}$. Da qui innanzi indicheremo colle lettere majuscole A, B, C, gli angoli d'un triangolo, e con le corrispondenti minuscole a, b, c, i lati rispettivamente opposti.

Questo primo teorema fondamentale darà dunque $\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$. E perciò

$$\left.\begin{array}{l} 1^a \quad a : b :: sen\,A : sen\,B \\ 2^a \quad a : c :: sen\,A : sen\,C \\ 3^a \quad b : c :: sen\,B : sen\,C \end{array}\right\} \text{Sistema } 1^\circ$$

59. Si ha da questo primo teorema; $b\ sen\ C = c\ sen\ B = b\ sen\,(180^\circ - A - B) = b\ sen(A+B)$, e perciò $c\ sen\ B = b\ sen\ A\ cos\ B + b\ cos\ A\ sen\ B$, e $c\ sen B - b\ cos A\ sen B = b\ sen\ A\ cos B$, ed elevando a quadrato questa equazione $c^2 sen^2 B + b^2 cos^2 A\ sen^2 B - 2bc\ cos\ A\ sen^2 B = b^2 sen^2 A\ cos^2 B$; sostituendo $1 - sen^2$ in cambio di cos^2, ed eliminati i termini uguali e contrarj, $c^2\ sen^2\ B + b^2\ sen^2\ B - 2bc\ cos\ A\ sen^2\ B = b^2\ sen^2\ A$; e dividendo tutto per $sen^2\ B$, ed estraendo la radice, $\sqrt{(c^2 + b^2 - 2bc\ cos\ A)} = \frac{b\ sen A}{sen\ B}$, ma $\frac{b\ sen\ A}{sen\ B} = a$ dunque si ha la seguente espressione di ciascun lato

$$\left.\begin{array}{l} 1^a \quad a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ A)} \\ 2^a \quad b = \sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ B)} \\ 3^a \quad c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ C)} \end{array}\right\} \text{Sistema } 2^\circ$$

secondo teorema fondamentale, il quale dimostra, che in un triangolo rettilineo qualunque, il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno il doppio prodotto di questi lati nel coseno dell' angolo da essi contenuto. Si capisce che se l'angolo opposto fosse ottuso il coseno cambierebbe di segno, divenendo positivo il termine che lo contiene. Ma le formole si costruiscono sempre nella supposizione degli angoli minori di 90°.

60. Poicchè $b : c :: sen\ B : sen\ C$

$$b + c : b \backsim c :: sen\ B + sen\ C : sen\ B \backsim sen\ C$$

$$\frac{b \backsim c}{b+c} = \frac{\text{sen}\ B \backsim \text{sen}\ C}{\text{sen}\ B + \text{sen}\ C} = \frac{\tan \frac{1}{2}(B \backsim C)}{\tan \frac{1}{2}(B+C)} \ldots \ Gon.\ \S\ 133,$$

$$= \frac{\tan \frac{1}{2}(B \backsim C)}{\tan \frac{1}{2}(180^\circ - A)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(B \backsim C)}{\cot \frac{1}{2} A}.$$

Onde sta la somma di due lati alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli opposti alla tangente della loro semidifferenza: o pure come la cotangente della metà dell'angolo contenuto alla tangente della semidifferenza degli altri due angoli. *Gon.* 134.

61. Sia il triangolo rettangolo in A; sarà a l'ipotenusa, ed $A = 90^\circ = B + C$; e quindi $sen\ A = sen\, 90^\circ =$ al raggio $= 1$; $sen\ B = sen(90^\circ - C) = cos\ C$; $sen\ C = sen(90^\circ - B) = cos\ B$. Il primo teorema darà

$$\frac{a}{R} = \frac{a}{1} = a = \frac{b}{\text{sen}\ B} = \frac{b}{\text{sen}\ (90 - C)} = \frac{b}{\cos C} = \frac{c}{\text{sen}\ C} =$$

$\dfrac{c}{\text{sen}\ (90^\circ - B)} = \dfrac{c}{\cos B}$. Cioè in un triangolo rettangolo, l'ipotenusa sta al raggio, come un lato al seno dell'angolo opposto, o come un lato al coseno dell'angolo adjacente. O sia, presa l'ipotenusa per raggio, ogni angolo ha per seno il lato opposto, e per coseno il lato adjacente. *Gon.* 15.

62. Sta $b : c :: sen\ B : sen\ C$. Onde

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen}\ B}{\text{sen}\ C} = \frac{\text{sen}\ B}{\text{sen}\ (90^\circ - B)} = \frac{\text{sen}\ B}{\cos B} = tan\ B, \text{ ovvero}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\text{sen}\ C}{\text{sen}\ B} = \frac{\text{sen}\ C}{\text{sen}\ (90^\circ - C)} = \frac{\text{sen}\ C}{\cos C} = tan\ C.$$

Dunque in ogni triangolo rettangolo sta un lato all' altro, come il raggio è alla tangente dell' angolo che gli è opposto. O sia preso un lato per raggio, l' altro lato è tangente dell' angolo opposto, il quale perciò ha l'ipotenusa per secante, ed è cotangente dell'angolo adjacente, che ha l' ipotenusa per cosecante.

63. Nella stessa ipotesi di A retto, dal teorema 2° si ha $a^2 = b^2 + c^2$, perchè essendo cos $A = o$, sparisce il termine moltiplicato pel medesimo. Cioè il quadrato dell'ipotenusa uguaglia la somma dei quadrati dei cateti, come si sa altronde.

64. La risoluzione dei triangoli rettilinei dipende dal sistema fondamentale num.° 1°, che in se comprende il susseguente num.° 2°. La considerazione dell'angolo retto non è, che un caso particolare dei medesimi; siccome è pure caso particolare la considerazione di due lati uguali per li triangoli isosceli. Noi ci dispensiamo di svilupparli e passeremo alla risoluzione dei triangoli sferici.

Teoremi fondamentali per la risoluzione dei triangoli sferici.

65. Sia il triangolo sferico ABC *(fig. 13)* formato dai tre archi AB, AC, e BC, e ai suoi tre vertici s' intendano condotti i tre raggi DA, DB, e DC. Siano nel punto A, AN tangente dell'arco AC, ed AM tangente dell' arco AB. E prolungando i due raggi DB, e DC sino all'incontro delle tangenti AM, AN, si unisca MN.

Nel triangolo sferico ABC, il lato AB avrà AM per tangente, e DM per secante, ed il lato AC avrà AN per tangente, e DN per secante; il lato MN è comune ai triangoli rettilinei MAN, MDN; e l'an-

golo MDN ha per misura l'arco BC, terzo lato del triangolo sferico.

Per il sistema 2° sarà quindi $\overline{MN}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{NA}^2 - 2MA \,.\, NA \,.\, \cos MAN = \tan^2 AB + \tan^2 AC - 2\tan AB \tan AC \cos A$. E nel triangolo MDN sarà $\overline{MN}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{ND}^2 - 2MD \,.\, ND \,.\, \cos MDN = \sec^2 AB + \sec^2 AC - 2\sec AB \sec AC \cos BC$.

Uguagliando questi due valori di $\overline{MN}^2$, e trasponendo, $\sec^2 AB - \tan^2 AB + \sec^2 AC - \tan^2 AC = 2\sec AB \sec AC \cos BC - 2\tan AB \tan AC \cos A$. Ma $\sec^2 - \tan^2 = r^2 = 1$, e dividendo per 2 si avrà $1 = \sec AB \sec AC \cos BC - \tan AB \tan AC \cos A$. Si moltiplichi tutto per $\cos AB \cos AC$ e si rifletta, che (*Gon.* 26) $\sec \times \cos = r^2 = 1$, e $\tan \times \cos = r \,\mathrm{sen}$ e trasponendo si otterrà in fine

$$\cos BC = \cos AB \cos AC + \mathrm{sen}\, AB\, \mathrm{sen}\, AC \cos A.$$

66. Dalla quale equazione emerge il seguente sistema di equazioni.

$$\left.\begin{array}{ll} 1^a & \cos a = \cos b \cos c + \mathrm{sen}\, b\, \mathrm{sen}\, c \cos A \\ 2^a & \cos b = \cos a \cos c + \mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, c \cos B \\ 3^a & \cos c = \cos b \cos a + \mathrm{sen}\, b\, \mathrm{sen}\, a \cos C \end{array}\right\} \text{Sistema } 3^\circ$$

Teorema fondamentale della Trigonometria sferica, che è compreso nel teorema 2° ausiliario della rettilinea; il quale dimostra, che il coseno d'un lato qualunque in un triangolo sferico è uguale al prodotto dei coseni degli altri due lati più il prodotto dei seni dei lati medesimi nel coseno dell'angolo da essi contenuto.

67. Ne siegue che $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\mathrm{sen}\, b\, \mathrm{sen}\, c}$, ed

elevando a quadrato $\cos^2 A = \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}\right)^2$, e

$1 - \cos^2 A = \operatorname{sen}^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}\right)^2$

$= \frac{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$, e perciò

$\operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{(\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2)}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$, e riflettendo che $\operatorname{sen}^2 = 1 - \cos^2$, sostituendo, elevando a quadrato il termine sotto la parentesi, e riducendo, si ha

$\operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c)}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$

dunque fatto $= P$. il numeratore, il quale, perchè composto di tutti i tre lati, è costante per tutti i triangoli, e dividendo l'equazione pel seno del lato opposto all'angolo, cioè per $\operatorname{sen} a$, si ha $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{P}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$,

e nel modo istesso si troverà, $\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{P}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$, e

$\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} = \frac{P}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$, dunque $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$

e perciò

$$\left.\begin{array}{l} 1^a \ \operatorname{sen} a : \operatorname{sen} b :: \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B \\ 2^a \ \operatorname{sen} a : \operatorname{sen} c :: \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} C \\ 3^a \ \operatorname{sen} b : \operatorname{sen} c :: \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C \end{array}\right\} \text{Sistema } 4^o$$

cioè: 1° In un triangolo sferico i seni di due lati sono come i seni degli angoli opposti. 2° Se due lati sono uguali, lo sono pure gli angoli opposti, e viceversa.

68. $cot\,A = \frac{\cos A}{\text{sen}\,A} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\,A\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}$, ma $sen\,A = \frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,B}{\text{sen}\,b}$, dunque $cot\,A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c} \times \frac{\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,B}$ $= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c\,\text{sen}\,B}$, o sia $sen\,B\,cot\,A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c}$ e perchè $cos\,b = cos\,a\,cos\,c + sen\,a\,sen\,c\,cos\,B$, si ha

$$sen\,B\,cot\,A = \frac{\cos a - \cos c\,(\cos a \cos c + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,c \cos B)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c}$$

$= \frac{\cos a - \cos a \cos^2 c - \cos B\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c \cos c}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c}$, mettendo $1 - sen^2$ in vece di cos^2, e riducendo, si ha

$$sen\,B\,cot\,A = \frac{\cos a\,\text{sen}^2 c - \cos B\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c \cos c}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c} =$$

$cot\,a\,sen\,c - cos\,B\,cos\,c$; e quindi si ottiene

$$\left.\begin{array}{l} 1^a\ \cos A \cos b = \cot c\,\text{sen}\,b - \text{sen}\,A \cot C \\ 2^a\ \cos B \cos c = \cot a\,\text{sen}\,c - \text{sen}\,B \cot A \\ 3^a\ \cos C \cos a = \cot b\,\text{sen}\,a - \text{sen}\,C \cot B \end{array}\right\}\ \text{Sistema } 5^\circ$$

Terzo teorema sussidiario per la soluzione dei triangoli sferici.

69. $cot\,A = \frac{\cot a\,\text{sen}\,c - \cos B \cos c}{\text{sen}\,B}$ sist.5°, e pel sist.4° $sen\,A = \frac{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,a}{\text{sen}\,b}$, onde $cot\,A\,sen\,A = cos\,A =$

$\frac{\cot a\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c\,\text{sen}\,B}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,B} - \frac{\text{sen}\,a \cos c\,\text{sen}\,B \cos B}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,B} = \frac{\cos a\,\text{sen}\,c}{\text{sen}\,b}$

$- \frac{\text{sen}\,a \cos c \cos B}{\text{sen}\,b}$. Onde per li sist. 3° e 4° $cos\,A =$

$\frac{\cos a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} - \frac{\operatorname{sen} a \cos B}{\operatorname{sen} b}(\cos C \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b) =$

$\frac{\cos a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} - \operatorname{sen}^2 a \cos B \cos C - \operatorname{sen} a \cos a \cos B \cot b$

e sostituendo il valore di $\cot b$ preso dal sist. 5° n.° 3° si ha fatte le riduzioni necessarie, $\cos A = \frac{\cos a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} -$ $\operatorname{sen}^2 a \cos B \cos C - \cos^2 a \cos B \cos C -$ $\cos a \operatorname{sen} C \cos B \cot B$: ma $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$, e $\cos B \cot B = \frac{\cos^2 B}{\operatorname{sen} B}$, sostituendo, ed elidendo,

$\cos A = \frac{\cos a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} - \cos B \cos C - \frac{\cos a \cos^2 B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$

ma $\cos^2 B = 1 - \operatorname{sen}^2 B$, onde $\cos A = \frac{\cos a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} -$ $\cos B \cos C - \frac{\cos a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} + \frac{\cos a \operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} =$ $\cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C$, equazione d' onde si ottiene il seguente sistema

$$\left.\begin{aligned} 1^a\ \cos A &= \cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C \\ 2^a\ \cos B &= \cos b \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C - \cos A \cos C \\ 3^a\ \cos C &= \cos c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A \cos C \end{aligned}\right\} \text{Sistema } 6^\circ$$

Quarto teorema sussidiario per la soluzione dei triangoli sferici.

70. Se nel sistema terzo si fossero sostituite $180^\circ - a'$, $180^\circ - b'$, $180^\circ - c'$ per A, B, C, e $180^\circ - A'$, $180^\circ - B'$, $180^\circ - C'$ per a, b, c, si sarebbe ottenuto il sist. 6° come oriundo del triangolo polare, sul quale A', B', C'

angoli sono supplementi a 180 di a, b, c, lati del triangolo primitivo, e viceversa per i lati.

71. Il teorema fondamentale terzo contiene i suoi ausiliari 4°, 5°, e 6°, e risolve tutti i casi dei triangoli sferici, quando cioè dati tre dei sei elementi del triangolo se ne cerca il quarto. Con essi dunque formeremo tutte le equazioni necessarie alla soluzione dei problemi sferici: e poicchè i triangoli sferici rettangoli per la conoscenza certa dell'angolo retto presentano formole assai semplici, noi da questi cominciamo.

Risoluzione dei triangoli sferici rettangoli.

72. Un triangolo sferico può avere tre angoli retti, ed allora i suoi lati son tutti di 90°, ed eccolo risoluto.

73. Può non avere che due angoli retti, e i lati opposti saranno allora di 90°. Ma questi dati non danno il valor del terzo angolo nè del terzo lato. Si sa solamente che essi sono di ugual numero di gradi.

74. Non si considerano dunque che i triangoli che hanno un'angolo retto. Sia il triangolo ABC (*fig.* 14) rettangolo in A.

Dei lati a, b, c, opposti rispettivamente agli angoli corrispondenti, a si chiami l'ipotenusa, perchè opposta all'angolo retto A, e i lati b, c, sono opposti agli angoli obliqui B, e C. Date due delle cinque quantità B, C, a, b, c, si trovano le altre per mezzo dei quattro sistemi 3°, 4°, 5°, e 6°; purchè in essi si supponga $A=90°$, e perciò $sen\ A=1$, $cos\ A=0$,

$tan\ A = \infty$, $cot\ A = \frac{1}{\infty}$.

75. Dal sistema

3°	$\cos a = \cos b \cos c$	1ª
6°	$\cos a = \cot B \cot C$	2ª
5°	$\cos B = \cot a \tan c$	3ª
6°	$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C$	4ª
4°	$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$	5ª
4°	$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C$	6ª
5°	$\cot C = \operatorname{sen} b \cot c$	7ª
6°	$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B$	8ª
	$\tan c = \operatorname{sen} b \tan C$	9ª
	$\tan b = \operatorname{sen} c \tan B$	10ª
	$\cos C = \cot a \tan b$	11ª
	$\cot B = \cos a \tan C$	12ª

Mettendo nella 7ª $\frac{1}{\tan}$ in luogo di *cot* si ha la 9ª.

Essendo per la 9ª la tangente di un lato uguale al prodotto della tangente dell' angolo opposto nel seno dell'altro lato, adattando al secondo lato questo teorema si ha la 10ª. Dello stesso modo adattando all'altro angolo obbliquo la 3ª si ottiene la 11ª.

La 12ª si ha dalla 2ª facendovi $\cot C = \frac{1}{\tan C}$.

La 10ª e la 11ª si hanno ancora, sostituendo il valore di $\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$ preso dalla 6ª nella 5ª cioè in $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$, per cui si ha
$\operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$, ma per la 4ª $\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$,
dividendo l'una per l'altra si ha

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \tan b = \operatorname{sen} c \tan B.$$

La 1ª da $\cos a = \cos b \cos c$, e l' 8ª $\cos c = \frac{\cos C}{\text{sen } B}$

onde $\cos a = \frac{\cos b \cos C}{\text{sen } B}$ ma per la 5ª $\text{sen } B = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a}$,

onde $\cos a = \frac{\cos b \cos C \text{ sen } a}{\text{sen } b}$ e indi $\cot a = \cot b \cos C$,

oppure $\cos C = \cot a \tan b$, che è l' 11ª.

76. Dalle precedenti formule discendono le soluzioni dirette di tutti i casi del triangolo rettangolo, e dalle loro combinazioni le soluzioni indirette, che spesso dagli astronomi sono sostituite alle dirette. Son esse di continuo uso nei calcoli del sole; nei quali BA rappresenta l'ascensione retta del sole $= AR \ldots BC$ la longitudine $= L \ldots AC$ la declinazione $= D$, l'angolo B l'obbliquità dell'Ecclittica $= \omega$; e l'angolo $C = \pi$ è il complemento dell'angolo di posizione, la qual cosa si concepirà meglio dalla fig. 17 dove rappresentano BC' un'arco dell'ecclittica; BA' un'arco dell'equatore, ed $A'C'$ l'arco corrispondente di declinazione.

77. Queste soluzioni si trovano qui in disteso, per come sieguono dalle dodeci formole generali.

Conoscendosi l' *ipotenusa* ed un' *angolo*, si può cercare. 1° Il lato opposto all'angolo. 2° Il lato ad esso adjacente. 3° L'altro angolo.

Fª. 4ª $\text{sen } b = \text{sen } B \text{ sen } a \ldots \text{sen } D = \text{sen } \omega \text{ sen } L$. 1

3ª $\tan c = \cos B \tan a \ldots \tan AR = \cos \omega \tan L$. 2

2ª $\cot C = \tan B \cos a \ldots \cot \pi = \tan \omega \cos L$. 3

L'arco b è della stessa specie dell'angolo dato B che gli è opposto, e reciprocamente.

L'arco c sarà della specie indicata dalla tangente dell'ipotenusa, perchè $\tan a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$.

L'angolo C sarà acuto quando l'ipotenusa e l'angolo dato sono della stessa specie, e sarà ottuso se sono di specie differente.

78. Quando si conosce l' *ipotenusa*, e l'altro angolo le formole hanno lo stesso aspetto.

$$\left.\begin{array}{l} sen\ c = sen\ C\ sen\ a \\ tan\ b = cos\ C\ tan\ a \\ cot\ B = tan\ C\ cos\ a \end{array}\right\}$$ Per il Sole non si adoperano. 4, 5, 6

79. Conoscendosi l' *ipotenusa* ed un *lato* si può cercare. 1° L'angolo opposto al lato dato. 2° L'angolo formato dall'ipotenusa col lato dato. 3° Il terzo lato.

F^a. 5^a $sen\ B = \frac{sen\ b}{sen\ a} \ldots sen\ \varpi = \frac{sen\ D}{sen\ L}$. 7

11^a $cos\ C = cot\ a\ tan\ b \ldots cos\ \pi = cot\ L\ tan\ D$. 8

1^a $cos\ c = \frac{cos\ a}{cos\ b} \ldots cos\ AR = \frac{cos\ L}{cos\ D}$. 9

80. Conoscendosi l' *ipotenusa* e l'altro lato le formole presenteranno lo stesso aspetto, di fatti,

$$sen\ C = \frac{sen\ c}{sen\ a} \ldots sen\ \pi = \frac{sen\ AR}{sen\ L}. \quad 10$$

$$cos\ B = cot\ a\ tan\ c \ldots cos\ \varpi = cot\ L\ tan\ AR. \quad 11$$

$$cos\ b = \frac{cos\ a}{cos\ c} \ldots cos\ D = \frac{cos\ L}{cos\ AR}. \quad 12$$

81. Conoscendosi li *due lati*, si può cercare: 1° L'ipotenusa. 2° L'angolo opposto ad uno dei lati dati. 3° L'angolo adjacente ad un lato dato.

F^a^. 1^a^ $\cos a = \cos b \cos c \ldots \cos L = \cos AR \cos D$. 13

7^a^ o 10^a^ $\tan B = \frac{\tan b}{\text{sen } c} \ldots \tan \omega = \frac{\tan D}{\text{sen } AR}$. 14

idem $\tan C = \frac{\tan c}{\text{sen } b} \ldots \tan \pi = \frac{\tan AR}{\text{sen } D}$. 15

82. Conoscendosi un *lato* e l' *angolo opposto* si può cercare: 1° L'ipotenusa. 2° Il terzo lato. 3° L'angolo adjacente al lato dato.

F^a^. 5^a^ $\text{sen } a = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} \ldots \text{sen } L = \frac{\text{sen } D}{\text{sen } \omega}$. 16

10^a^ $\text{sen } c = \frac{\tan b}{\tan B} \ldots \text{sen } AR = \frac{\tan D}{\tan \omega}$. 17

4^a^ $\text{sen } C = \frac{\cos B}{\cos b} \ldots \text{sen } \pi = \frac{\cos \omega}{\cos D}$. 18

Gli angoli o gli archi trovati per via de' *seni* possono essere acuti o ottusi. Costituiscono li *casi dubbj* della Trigonometria. Lo stesso si dica delle seguenti tre formole consimili.

83. Conoscendosi l'altro lato, e l' angolo ad esso opposto.

$\text{sen } a = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$ 19

$\text{sen } b = \text{sen } c \cot C$ — Non servono per il Sole. 20

$\text{sen } B = \frac{\cos C}{\cos c}$ 21

84. Conoscendosi un *lato* e l' *angolo adjacente*, si può cercare: 1° L'ipotenusa. 2° L'angolo opposto al lato dato. 3° Il terzo lato.

F^a. 11^a $\tan a = \dfrac{\tan b}{\cos C} \ldots \tan L = \dfrac{\tan D}{\cos \pi}$. 22

4^a $\cos B = \cos b \,\text{sen}\, C \ldots \cos \omega = \cos D \,\text{sen}\, \pi$. 23

7^a $\tan c = \text{sen}\, b \tan C \ldots \tan AR = \text{sen}\, D \tan \pi$. 24

85. Ma conoscendo l' altro lato, e il suo angolo adjacente, si hanno le seguenti formole simili alle precedenti.

$$\tan a = \frac{\tan c}{\cos B} \ldots \tan L = \frac{\tan AR}{\cos \omega}. \quad 25$$

$$\cos C = \text{sen}\, B \cos c \ldots \cos \pi = \text{sen}\, \omega \cos AR. \quad 26$$

$$\tan b = \tan B \,\text{sen}\, c \ldots \tan D = \tan \omega \,\text{sen}\, AR. \quad 27$$

86. Conoscendosi li *due angoli*, si può cercare: 1° L'ipotenusa. 2° Il lato opposto ad uno degli angoli dati. 3° Il dato adjacente.

F^a. 2^a $\cos a = \cot B \cot C$ 28

4^a $\cos b = \dfrac{\cos B}{\cos C}$ 29

8^a $\cos c = \dfrac{\cos C}{\text{sen}\, B}$ 30

(28–30: Non si adoperano per il Sole.)

87. Nella 14^a e 15^a $\tan B$ e $\tan b$, $\tan C$, e $\tan c$ hanno lo stesso segno, e l'una non può divenire negativa senza che l'altra lo sia pure, dunque

Nei triangoli sferici rettangoli ogni lato è della medesima specie dell'angolo opposto.

88. E poicchè il seno non può essere maggiore del raggio non può nella stessa analogia esser mai $\tan c > \tan C$, e $\tan b > \tan B$; ma essi sono della medesima specie, dunque

Nei triangoli sferici rettangoli un'angolo obbliquo non può essere minore se acuto, o maggiore se è ottuso del lato che gli è opposto.

89. Poicchè il maggior lato è opposto al maggior angolo, e il minore all'angolo minore siegue dal § 87 che se l'arco è $< 90°$ è il più corto, e se è maggior di $90°$ è il più lungo che possa menarsi ad un circolo da un punto dato, dunque

In un triangolo sferico rettangolo ogni lato minore di $90°$ è minore dell'ipotenusa, e sarà maggiore dell' ipotenusa ogni lato maggiore di $90°$.

90. Sieno i due cerchj massimi (*fig.* 15) PAB, PCB che formano il fuso PB, si conduca l'arco CA perpendicolare sul cerchio PAB, il triangolo ABC sarà rettangolo in A, e la sua ipotenusa sarà BC: sarà parimenti rettangolo in A il triangolo PAC, e PC ne sarà l'ipotenusa, e l'angolo $P = B$. Ma $sen\,BC$ $= \frac{\text{sen}\,AC}{\text{sen}\,B}$, e $sen\,PC = \frac{\text{sen}\,AC}{\text{sen}\,P} = \frac{\text{sen}\,AC}{\text{sen}\,B}$. Dunque dati un lato e l'angolo opposto rimane dubbio se l'ipotenusa del triangolo sia minore di $90°$ o se sia supplemento a $180°$. Lo stesso si dica sia se si cerchi l'angolo C, sia se cerchi il lato opposto all'angolo ignoto. Ciò si renderà più chiaro considerando le analogie da 16 a 21.

91. Generalmente essendo il seno di un' arco suscettibile di due valori, perchè $sen\,A = sen(180 - A)$, quando un'elemento del triangolo è determinato per mezzo del suo seno è dubbio se si debba ritenere il suo valore $< 90°$, o se si debba pigliarne il supplemento. Non è l'istesso colle altre funzioni circolari, le quali cambiando di segno a $90°$ le circostanze del problema spesso tolgono il dubbio.

92. In tutte le formole trigonometriche supponghiamo d' ordinario il raggio $= 1$ diviso in parti 10000000[esime], e le funzioni di un'arco o di un'angolo non sono che porzioni del medesimo, e perciò

linee. Introducendo quindi le potenze del raggio, come si è detto altrove, si ridurranno omogenei i termini trigonometrici, i quali a causa del raggio espresso dall'unità sembrano di dimensioni diverse.

93. Non sempre sono comode le precedenti soluzioni al calcolo. Poca precisione si ha dalle formole, che esprimono un'arco piccolissimo per mezzo del coseno o un'arco molto vicino a 90° per mezzo del seno. In questi casi bisognerà servirsi di certi artificj di calcolo, per li quali l'arco viene a trovarsi per mezzo della metà della sua tangente, o con un'altra funzione che non sia soggetta agli stessi inconvenienti.

94. Si cerchi l'arco b piccolissimo per mezzo della formola 12ª $\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}$. Si farà $\cos b \cos c = \cos a \ldots 1 : \cos b :: \cos c : \cos a \ldots 1 + \cos b : 1 - \cos b :: \cos c + \cos a : \cos c - \cos a \ldots \frac{1-\cos b}{1+\cos b} = \frac{\cos c - \cos b}{\cos c + \cos a}$. Ma (*Gon.* 168 e 206) $\frac{1-\cos b}{1+\cos b} = \tan^2 \tfrac{1}{2} b$, e $\frac{\cos c - \cos a}{\cos c + \cos a} = \tan \tfrac{1}{2}(a-c) \tan \tfrac{1}{2}(a+c)$, si otterrà $\tan^2 \tfrac{1}{2} b = \tan \tfrac{1}{2}(a-c) \tan \tfrac{1}{2}(a+c)$, ovvero $\tan \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\left(\frac{\tan \frac{1}{2}(a-c)}{\cot \frac{1}{2}(a+c)}\right)}$. In si fatta guisa, perchè il cambiamento delle tangenti è rapido nei piccoli archi, si otterrà con somma precisione il valore dell'arco b.

95. Si cerchi l'angolo C piccolo con la formola 8ª $\cos C = \cot a \tan b$, si farà $\cos C = \frac{\tan b}{\tan a} \ldots\ldots \tan a \cos C = \tan b \ldots\ldots 1 - \cos C : 1 + \cos C ::$

$tan\, a - tan\, b : tan\, a + tan\, b$; $\frac{1-\cos C}{1+\cos C} = \frac{\tan a - \tan b}{\tan a + \tan b}$

e (*Gon.* 206 e 159) $tan\, \frac{1}{2} C = \sqrt{\left(\frac{\text{sen}\,(a+b)}{\text{sen}\,(a-b)}\right)}$.

96. Se l'angolo C è grande, e si abbia $sen\; C = \frac{\text{sen}\; c}{\text{sen}\; a}$ come nella 10ª, si farà $sen\; a\; sen\; C = sen\; c \ldots$ onde $\frac{1+\text{sen}\; C}{1-\text{sen}\; C} = \frac{\text{sen}\; a + \text{sen}\; c}{\text{sen}\; a - \text{sen}\; c}$, ma (*Gon.* 133 e 241) $\frac{1+\text{sen}\; C}{1-\text{sen}\; C} = tan^2\,(45 + \frac{1}{2}C)$, e $\frac{\text{sen}\; a + \text{sen}\; c}{\text{sen}\; a - \text{sen}\; c} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a+c)}{\tan \frac{1}{2}(a-c)}$ onde si troverà con gran precisione l'angolo C dalla formola $tan\,(45 + \frac{1}{2}\, C) = \sqrt{\left(\frac{\tan \frac{1}{2}\,(a+c)}{\tan \frac{1}{2}\,(a-c)}\right)}$, per cui cercato nelle tangenti il valore del secondo membro, e sottrattovi $45°$, si ottiene $\frac{1}{2}\, C$.

97. Generalmente avendosi $cos\; x = \frac{p}{q}$ si otterrà $tan\, \frac{1}{2}\, x = \sqrt{\left(\frac{q-p}{q+p}\right)}$: per $sen\; x = \frac{p}{q}$ si ha $tan\,(45 + \frac{1}{2}\, x) = \sqrt{\left(\frac{q+p}{q-p}\right)}$. Per mezzo dell' espressioni goniometriche si renderà poi più semplice il secondo membro.

98. Avendosi $cos\; x = \frac{p}{q}$ si può anche scegliere tra le espressioni del coseno quella che è più commoda, e fattala uguale a $\frac{p}{q}$, si otterrà un'altra funzione di x espressa in p e q. Se si scelga (*Gon.* 30)

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 x)}}$ si farà $\cos^2 x = \frac{p^2}{q^2} = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ da questa equazione si otterrà $\tan x = \left(\frac{q^2-p^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

99. Se sia $\cos x = pq \ldots \cos^2 x = p^2 q^2 = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ e quindi $\tan x = \sqrt{\left(\frac{1-p^2 q^2}{p^2 q^2}\right)}$.

100. Se si faccia (*Gon.* 210) $sen\, x = pq = \frac{2 \tan \frac{1}{2} x}{1+\tan^2 \frac{1}{2} x}$ moltiplicando per $1 + \tan^2 \frac{1}{2} x$, compiendo il quadrato, ed estraendo la radice si troverà $\tan \frac{1}{2} x = \frac{1}{pq} \pm \sqrt{\left(\frac{1-p^2 q^2}{p^2 q^2}\right)} = \frac{1}{pq}\left(1 - \sqrt{(1-p^2 q^2)}\right)$.

101. Nella 1^a $sen\, b = sen\, B\, sen\, a$, se si supponga il complemento dell'arco b, o sia $90^\circ - b = 2x$, sarà $b = 90 - 2x$, e $sen\, b = sen(90-2x) = \cos 2x$, ma $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ (*Gon.* 75) onde $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = sen\, B\, sen\, a$. Si caverà $\tan^2 x = \frac{1-sen\, B\, sen\, a}{1+sen\, B\, sen\, a}$, ma $x = 45 - \frac{1}{2} b$, dunque $\tan^2 (45 - \frac{1}{2} b) = \frac{1-sen\, B\, sen\, a}{1+sen\, B\, sen\, a}$ lo stesso avrebbe dato il valore di $sen\, b$ n.° 244.

102. Si è adoperato l'angolo ausiliario x, ma adoperandone due il calcolo riesce anche più breve.

Poicchè la tangente di sua natura è suscettibile di qualunque valore, in vece del precedente artificio nella stessa formula 1^a $sen\, b = sen\, B\, sen\, a$, si può fare $\tan y = sen\, B\, sen\, a$, e $2x = 90 - b$; sarà $sen\, b = sen\,(90-2x) = \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \tan y$

d'onde si ha $tan^2\, x = \frac{1 - tan\, y}{1 + tan\, y} = tan\,(45 - y) \ldots$ *Gon.* 231.

Spedito così riesce il calcolo facendo, $sen\, B\, sen\, a = tan\, y$; $\sqrt{(tan\,(45 - y))} = tan\, x \ldots$ e l'arco cercato $b = 90 - 2x$. Questo è il metodo degli astronomi.

103. Se il secondo membro fosse di due termini, come sist. 3,

$$cos\, a = cos\, b\, cos\, c + sen\, b\, sen\, c\, cos\, A$$

si divida tutto per $cos\, b$, e si avrà

$$\frac{cos\, a}{cos\, b} = cos\, c + tan\, b\, cos\, A\, sen\, c$$

si faccia $tan\, b\, cos\, A = tan\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$, si sostituisca e si tolga il denominatore, onde si avrà

$$\frac{cos\, a\, cos\, x}{cos\, b} = cos\, c\, cos\, x + sen\, c\, sen\, x = cos\,(c - x),$$

e finalmente $cos\, a = \frac{cos\, b\, cos\,(c - x)}{cos\, x} \ldots$ in questo stato si faranno su questa formola le operazioni precedenti, tenendo sempre presente che si suppose $tan\, b\, cos\, A = tan\, x$. Gli astronomi fanno frequente uso di questo metodo, come vedremo appresso.

104. Si abbia (for. 28) $cos\, a = cot\, B\, cot\, C$, si otterrà (*Gon.* 75) $cos\, a = \frac{1 - tan^2 \frac{1}{2} a}{1 + tan^2 \frac{1}{2} a}$ e quindi

$$tan^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - cot\, B\, cot\, C}{1 + cot\, B\, cot\, C} = \frac{sen\, B\, sen\, C - cos\, B\, cos\, C}{sen\, B\, sen\, C + cos\, B\, cos\, C}$$

$$= \frac{-(cos\, B\, cos\, C - sen\, B\, sen\, C)}{cos\, B\, cos\, C + sen\, B\, sen\, C} = \frac{-cos\,(B + C)}{cos\,(B - C)}.$$

Per le vicende del calcolo riuscendo $\cos(B+C)$ negativo, il valore dell'ipotenusa a sarebbe immaginario se $B+C$ non fosse maggiore di 90°. Ma $B+C$ è la somma dei due angoli obbliqui nel triangolo sferico. Dunque nei triangoli sferici rettangoli la somma dei due angoli obbliqui è sempre maggiore di 90°.

105. Si abbia (for. 8) $\cos C = \tan b \cot a$ ....

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{1 - \tan b \cot a}{1 + \tan b \cot a} = \frac{\cos b \,\text{sen}\, a - \text{sen}\, b \cos a}{\cos b \,\text{sen}\, a + \text{sen}\, b \cos a} =$$

$$\frac{\text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}\,(a+b)} \dots \text{ e quindi } \tan \tfrac{1}{2} C = \left(\frac{\text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}\,(a+b)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il numeratore e il denominatore del secondo membro bisogna che fossero o ambidue positivi, o ambidue negativi affinchè il valore di C fosse reale, e non immaginario. Onde quando $a + b$ riesce maggiore di 180° è necessario che l'ipotenusa a sia minore dell'altro lato. Perciò quando nei triangoli sferici rettangoli vi sono angoli ottusi, l'ipotenusa non è più il maggiore dei lati. Ciò è conseguenza del teorema n°. 52.

106. Se un lato del triangolo è di 90°, il triangolo dicesi *quadrantale*, oppure *rettilatero*.

Nei sistemi 3, 4, 5, e 6, supposto $a = 90$ si troverebbero otto formole fondamentali per la soluzione del medesimo, analoghe a quelle che sopra si son trovate per il triangolo rettangolo; nelle quali si vedrà che gli angoli del rettangolo pigliano il posto dei lati del quadrantale, e i lati degli angoli. Facile quindi riesce la soluzione di questa specie di triangoli, li quali spesso s'incontrano in astronomia. Basta riflettere che il triangolo polare del triangolo rettangolo è un triangolo quadrantale: e perciò le formole del primo si convertiranno in quelle del secondo, purchè si con-

siderino i lati dell'uno supplementi a 180° degli angoli dell'altro, e gli angoli supplementi dei lati.

Sia Z il zenit (*fig.* 16) P il polo, S il Sole nell'Orizzonte, PS sarà la distanza polare, PZ la distanza del zenit del polo, e ZS la distanza del Sole dal zenith$=90^\circ$. Si avrà dunque un triangolo quadrantale nel quale son noti $ZP = 51^\circ\ 53'$ (sotto il zenith di Palermo) $PS = 80^\circ$, e $ZS = 90^\circ$, che è il lato per cui il triangolo è quadrantale. Si cerchi l'angolo contenuto P, opposto al lato retto, dal quale si ha l'arco semidiurno. Se si compari il triangolo dato al triangolo generale (*fig.* 14) saranno noti c, e b, e si cerca A. Per aver la formola corrispondente tra quelle del triangolo rettangolo si convertano le lettere majuscole in minuscole, e viceversa; saranno noti adunque C, e B, e si cerca a nel triangolo rettangolo: dunque l'analogia 28ª dei triangoli rettangoli risolverà il problema; solo che in vece di $c = 51^\circ\ 53'$ (*fig.* 16) si adoperi $C = 128^\circ\ 7'$; in vece di $b = 80^\circ$ si adoperi $B = 100$; così si troverà a uguale al supplemento di A; ossia, il suo valore trovato sottratto da 180° darà A, l'angolo che si cercava.

107. Spesso succede in astronomia che due triangoli rettangoli da risolversi abbiano comuni o un'angolo, o un lato o l'ipotenusa, comunque non conosciuti. In tal caso si *compongono* le formole corrispondenti dei due triangoli rettangoli nelle quali entra lo elemento comune non conosciuto, e si ottiene sempre un'analogia di quattro soli termini che risolve il triangolo.

Sia BCC' (*fig.* 17) l'ecclittica; BAA' l'equatore; AC, $A'C'$, due successive declinazioni del Sole: si hanno i due triangoli rettangoli BAC, $BA'C'$, nei quali l'angolo B è comune. Sieno ora note due lon-

gitudini, ed una declinazione, si cerchi l'altra. Sieno note BC, BC', e CA si cerca $C'A'$. Segnando coll'asterisco le lettere che indicano gli elementi nell'altro triangolo saranno noti, a, b, a', si cerca b';

Dalla 1ª si ha $1 : sen\,B :: sen\,a : sen\,b$

$$1 : sen\,B :: sen\,a' : sen\,b'$$

dunque $sen\,a : sen\,a' :: sen\,b : sen\,b' = \frac{sen\,a'\,sen\,b}{sen\,a}$.

Sieno ora note le longitudini, ed una AR e si cerchi la seconda AR, ossia son noti BC, BC' e BA si cerca BA': cioè son dati a, c, ed a' si cerca c';

Dalla 6ª si ha $cot\,a : 1 :: cos\,B : tan\,c$

$$cot\,a' : 1 :: cos\,B : tan\,c'$$

dunque $cot\,a' : cot\,a :: tan\,c : tan\,c'$ dunque $tan\,c' = \frac{cot\,a\,tan\,c}{cot\,a'} = \frac{tan\,c\,tan\,a'}{tan\,a}$. In simil guisa *componendo* le altre per li diversi casi di due triangoli si avranno li seguenti teoremi.

108. *Per due triangoli sferici rettangoli, che hanno l'ipotenusa comune.*

1° Il prodotto dei coseni de' lati nell'uno è uguale al prodotto dei coseni de' lati nell'altro.

2° Il prodotto delle tangenti degli angoli nell'uno è uguale al prodotto delle tangenti degli angoli nell'altro.

3° È uguale in ambidue il rapporto dei seni degli angoli ai seni dei lati opposti.

4° È uguale in ambidue il rapporto della tangente di un lato al coseno dell'angolo adjacente.

109. *Per due triangoli sferici rettangoli che hanno un lato comune.*

1° Il prodotto del seno dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al lato comune è uguale nei due triangoli.

2° Il prodotto della tangente dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adjacente al lato comune è uguale nei due triangoli.

3° Il prodotto del seno del lato non comune per la tangente dell' angolo a questo adjacente è uguale nei due triangoli.

4° È uguale in ambidue il rapporto del coseno dell'ipotenusa al coseno del lato non comune.

5° È uguale in ambidue il rapporto della tangente dell'angolo adjacente al lato comune al suo lato opposto.

6° È uguale in ambidue il rapporto del coseno dell'angolo opposto al lato comune al seno dell' angolo adjacente.

110. *Per due triangoli sferici rettangoli che hanno un'angolo comune.*

1° Il prodotto del coseno dell'ipotenusa per la tangente dell'angolo non comune è uguale ne' due triangoli.

2° Il prodotto del coseno del lato opposto all'angolo comune per il seno dell' angolo non comune è uguale nei due triangoli.

3° È uguale in ambidue il rapporto del seno dell'ipotenusa al lato opposto all'angolo comune.

4° È uguale in ambidue il rapporto della tangente dell' ipotenusa al seno del lato adjacente all' angolo comune.

5° È uguale in ambidue il rapporto della tangente del lato opposto all'angolo comune al seno del lato adjacente.

6° È uguale in ambidue il rapporto del coseno dell'angolo non comune al coseno del lato adjacente all'angolo comune.

111. Frequente è anche il caso di dover considerare come infinitamente piccoli li lati di un triangolo sferico, comechè, secondo la natura del problema lo siano realmente o no. In tale supposizione gli archi siccome è noto si confondono coi loro seni o tangenti, e il triangolo si risolve come rettilineo. Di fatti nelle analogie 1ª e 14ª mettendo i lati in cambio dei loro seni, e tangenti si ha

$$1 : sen\, B :: a : b \ldots 1 : tan\, B :: c : b$$

che sono le analogie fondamentali di un triangolo rettilineo rettangolo in A. Le serie che esprimono le funzioni degli archi circolari negli archi stessi somministrano il modo di tradurre in rettilinee le formole dei triangoli sferici. Perchè si ha, trascurando li termini di ordini inferiori, (*Gon.* 279 e seg.) ....

$$sen\, a = a \ldots tan\, a = a \ldots cot\, a = \frac{1}{a} \ldots cos\, a = 1 - \frac{a^2}{2}$$

onde, supposti i lati infinitamente piccoli nella tavola dei triangoli sferici basta sostituire i lati in cambio dei loro seni o delle loro tangenti. In vece di *cot lato* si sostituisca $\frac{1}{\text{lato}}$. In vece di *cos lato* si metta sempre l' unità quando è solo, o è moltiplicato per altra funzione; ma se vi è prodotto di due coseni dei lati si sostituisca l' unità meno la metà della somma dei quadrati dei lati, o sia si sostitui-

sca il prodotto dei primi due termini del valor del coseno espresso nell'arco stesso, rigettando il prodotto dei quadrati come quantità di quart'ordine. Con queste poche regole tutte le formole della Trigonometria sferica si traducono a quelle della rettilinea, eccettuate le sole che di loro natura ripugnano alla natura dei triangoli rettilinei, come sarebbero, per es. quelle che determinano l'ipotenusa per mezzo degli angoli ec.

Risoluzione dei triangoli sferici obbliquangoli.

112. Li quattro sistemi 4°, 5°, 6°, 7°, bastano per risolvere tutti i triangoli sferici in ogni caso, e poichè essi esprimono le relazioni generali tra quattro elementi dal triangolo basterà sviluppare il valor dell' incognita, che lasciata sola in un membro verrà espressa dalle funzioni degli altri tre elementi; ma perchè questi sviluppi non danno sempre le soluzioni più facili o più commode al calcolo, si fa uso di alcuni artificj, che danno formole assai più brevi, e più adattate all'uso dei logaritmi.

113. Se da uno dei vertici del Triangolo obbliquangolo si abbassi una perpendicolare sul lato opposto, resta esso diviso in due triangoli rettangoli, che avranno la perpendicolare medesima per lato comune ad ambidue. La perpendicolare può cadere o dentro, o fuori. Nel triangolo ABC (*fig.* 19 e 20) se la perpendicolare AD cadrà dentro il triangolo il valore di $BC = BD + CD$, e se cadrà fuori sarà $BC = CD - BD$. Ora nei triangoli sferici rettangoli ogni lato essendo della stessa specie dell'angolo opposto ne viene che la perpendicolare sarà opposta nei due triangoli rettangoli da essa formati ad angoli della stessa specie. Cadrà dunque dentro il triangolo se i due angoli sono della stessa specie, e cadrà fuori se saranno

essi di specie diversa. Ma le formole si devono costruire nella supposizione che la perpendicolare cada dentro, e che gli angoli, e i lati sieno minori di 90°. Così, osservando le regole dei segni, si ottengono i giusti valori delle cose che si cercano.

114. Nel triangolo generale ABC (*fig.* 19) si chiami *angolo verticale* un'angolo qualunque A, e *base* il lato opposto a. Li due altri angoli B e C si chiamano *primo* e *secondo* angolo sulla base, e i lati ad essi opposti b e c *primo* e *secondo* lato.

Si facci la perpendicolare $AD=p$, li due segmenti dell'angolo verticale M, N, e li due segmenti opposti della base m, n, sempre m dal canto dell'angolo B ed n di C. Onde sarà $A=M+N$, ed $a=m+n$ se la perpendicolare cade dentro; ed $A=M \backsim N$ ... $a=m \backsim n$ se la perpendicolare cade fuori. Se questa poi si abbassi da B li segmenti rispettivi saranno notati con le stesse lettere affette da un asterisco, se da C con due asterischi.

115. 1° Caso. Dati i *tre lati* si cerca *uno degli angoli*. Dati a, b, c, si cerchi, per es. A: il sistema 4° darà

$$1° \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen } b \text{ sen } c} = \frac{\cos a}{\text{sen } b \text{ sen } c} - \cot b \cot c$$

$$2° \quad \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\text{sen } a \text{ sen } c} = \frac{\cos b}{\text{sen } a \text{ sen } c} - \cot a \cot c$$

$$3° \quad \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\text{sen } a \text{ sen } b} = \frac{\cos c}{\text{sen } a \text{ sen } b} - \cot a \cot b$$

Questa è la formola analitica. Ma nojoso è il passaggio dai logaritmi ai numeri naturali, a cui obbliga questa formola, e se l'angolo è piccolo non se ne ottiene molta precisione. Perciò si converte in altre espressioni.

116. $1 - \cos A = 2\,\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}$

$$= \frac{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c + \cos b \cos c - \cos a}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c} = \frac{\cos(b \backsim c) - \cos a}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}$$

e (*Gon.* 124) $= \dfrac{2\,\text{sen}\, \tfrac{1}{2}(a - b \backsim c) \times \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(a + b \backsim c)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}$,

onde qualunque sia maggiore b o c sarà

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{sen}\, \tfrac{1}{2}(a + c - b)\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(a + b - c)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c} \ \ldots\ldots \text{ e}$$

$$\text{sen}\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{\text{sen}\, \tfrac{1}{2}(a + c - b)\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(a + b - c)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}\right)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\text{sen}\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\text{sen}\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}\right)}$$

117. $1 + \cos A = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} A$

$$= \frac{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c - \cos b \cos c + \cos a}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c} = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}$$

e quindi $\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{\text{sen}\, \tfrac{1}{2}(a + b + c)\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(b + c - a)}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}}$.

118. Dividendo le formule precedenti l'una per l'altra avremo

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{sen}\left(\frac{b+c+a}{2} - b\right)\text{sen}\left(\frac{b+c+a}{2} - c\right)}{\text{sen}\left(\frac{b+c+a}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{b+c+a}{2} - a\right)}$$

Quest'ultima formola è sempre esatta. Fatta la semisomma de' lati dati vi si sottragga uno de' lati che comprendono l'angolo cercato, e poi l'altro, e se ne scrivano li log. seni; indi dalla semisomma vi si sottragga il lato opposto all'angolo cercato e si scriva il cologaritmo seno, a cui si aggiunga il cologaritmo seno della semisomma istessa. La metà della somma di questi quattro logaritmi sarà il log. tang. della metà dell'angolo che si cerca.

119. Con li stessi dati si possono cercare insieme li due angoli B e C. Abbassando la perpendicolare sul lato BC e componendo la formula 9ª dei triangoli rettangoli secondo il nº. 108 si ha

$$\cos b : \cos c :: \cos m : \cos n$$

$$\cos b + \cos c : \cos b \backsim \cos c :: \cos m + \cos n : \cos m \backsim \cos n$$

$$\frac{\cos b + \cos c}{\cos b \backsim \cos c} = \frac{\cos m + \cos n}{\cos m \backsim \cos n} = \frac{\cot \frac{1}{2}(b+c)}{\tan \frac{1}{2}(b \backsim c)} =$$

$$\frac{\cot \frac{1}{2}(m+n)}{\tan \frac{1}{2}(m \backsim n)} = \frac{\cot \frac{1}{2} a}{\tan (m \backsim n)} \ldots$$ (*Gon.* 168.) onde

$$\tan \tfrac{1}{2}(m \backsim n) = \cot \tfrac{1}{2} a \cdot \tan \tfrac{1}{2}(b+c) \tan \tfrac{1}{2}(b \backsim c).$$

Si hanno così i segmenti della base perchè, il segmento maggiore sarà sempre $\frac{1}{2} a + \frac{1}{2}(m \backsim n)$, e il minore $= \frac{1}{2} a - \frac{1}{2}(m \backsim n)$. Per sapere se m è maggiore o minore di n, si rifletta che siegue dall'analogia composta $\frac{\cos b}{\cos m} = \frac{\cos c}{\cos n}$ che il segmento maggiore è adjacente al maggior dei lati, e il minore al minore.

Ottenuti i due segmenti della base si risolvono tosto i due triangoli rettangoli; perchè sarà sempre $\cos B = \tan m \cot c$, e $\cos C = \tan n \cot b$. Questa soluzione è di Nepero, e fa trovare i due segmenti della base, e i due angoli sulla base.

120. Che se si voglia il valore analitico di m e di n espresso nei lati del triangolo si ha $\cos B = \tan m \cot c = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}$, e riflettendo che $\frac{\cos b}{\operatorname{sen} c \cot c} = 1$, e $\operatorname{sen} \cot = \cos$ avremo

$$tan\ m = \frac{\cos b}{\operatorname{sen} a \cos c} - \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \cos c};$$

e similmente $tan\ n = \dfrac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \cos b}$.

121. 2° Caso. Dati i *tre angoli* trovare *un lato*. Essendo noti A, B, C, si cerca per esempio a. Il sistema 7° dà

$$1^\circ\ \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

$$2^\circ\ \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}$$

$$3^\circ\ \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$$

122. Facendo successivamente $1 - \cos a = 2 sen^2 \frac{1}{2} a$ ed $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{1}{2} a$, si hanno due formule analoghe, eccettuati i segni, a quelle del caso precedente,

$$sen^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

$$= \frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - A\right)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

Ne siegue che la semisomma dei tre angoli è maggiore di 90° § 46. E che perciò il segno negativo diviene positivo in ogni caso, essendo sempre negativo il $\cos \frac{1}{2}(A+B+C)$.

123. $\cos^2 \frac{1}{2} a$

$$= \frac{\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right) \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

e quindi:

124. $tan^2 \frac{1}{2} a$

$$= \frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-A\right)}{\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-B\right)\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-C\right)}$$

Le formole dunque sono le stesse che quelle del caso precedente applicate al triangolo polare.

125. Si cerchino i *due lati* c, e b. Abbassando la perpendicolare AD avremo una formola di Nepero analoga alla precedente. Di fatti pel § 109 n.° 6 si ha $\frac{\cos B}{\text{sen } M} = \frac{\cos C}{\text{sen } N}$, onde

$$sen\ M : sen\ N :: cos\ B : cos\ C$$

$$\frac{\text{sen } M + \text{sen } N}{\text{sen } M \backsim \text{sen } N} = \frac{\cos B + \cos C}{\cos B \backsim \cos C} = \frac{\tan \frac{1}{2} M + N}{\tan \frac{1}{2}(M \backsim N)} =$$

$$\frac{\cot \frac{1}{2}(B+C)}{\cot \frac{1}{2}(B \backsim C)} = \frac{\tan \frac{1}{2} A}{\tan \frac{1}{2}(M \backsim N)} \ \ldots \text{ è perciò}$$

$$tan\ \tfrac{1}{2}(M \backsim N) = tan\ \tfrac{1}{2} A\ \ tan\ (B+C)\ tan\ \tfrac{1}{2}(B \backsim C)$$

e quindi il segmento maggiore dell'angolo verticale $= \frac{1}{2} A + \frac{1}{2}(B \backsim C)$ e il minore $= \frac{1}{2} A - \frac{1}{2}(B \backsim C)$.

Dalla formula $\frac{\text{sen } M}{\cos B} = \frac{\text{sen } N}{\cos C}$ ora composta si vede che il segmento maggiore e il minore degli angoli sulla base sono adjacenti allo stesso lato del triangolo, e il segmento minore col maggiore dei due angoli sulla base sono adjacenti all'altro lato. Ottenuti così i segmenti dell'angolo verticale si ha il lato cercato c oppure b,

$$\left.\begin{array}{l} cos\ c = cot\ B\ cot\ M \\ cos\ b = cot\ C\ cot\ N \end{array}\right\} \text{(for. 28}^a\text{)}$$

126. Introducendo il valore di *cos c* e di *cos b* presi dal § 121 in queste formule si hanno le formule analitiche dei segmenti dell' angolo *A* espressi negli angoli del triangolo.

$$cot\ M = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \cos B}$$

$$cot\ N = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\operatorname{sen} A \cos C}$$

L'applicazione di questo caso è rarissima in astronomia.

127. 3° Caso. Dati *due lati, e l'angolo compreso* si può cercare il *terzo lato, o uno degli angoli ignoti.* Si cerchi il terzo lato.

Dal sis. 4° $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

128. Molesto riesce il calcolo quando passar si deve dalle linee trigonometriche ai numeri naturali, e in tali casi gli astronomi sogliono servirsi del seguente artifizio, già prima accennato.

Essendo $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$ si divida tutta l' equazione per *cos c* e si otterrà

$$\frac{\cos a}{\cos c} = \cos b + \tan c \operatorname{sen} b \cos A$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \tan c \operatorname{sen} b \cos c \cos A.$$

Ricorrendo alla pieghevolezza della tangente per qualunque valore si può sempre avere un'arco indeterminato x la di cui tangente sia uguale a $\tan c \cos A$, la quale sostituita nell' equazione precedente si ha

$$\cos a = \cos c\,(\cos b + \operatorname{sen} b \tan x) =$$

$$\cos c\left(\frac{\cos b \cos x + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos (b \backsim x) \cos c}{\cos x}.$$

Si facci adunque $\cos A \tan c = \tan x$, e quindi si ottiene subito $\cos a = \frac{\cos c \cos (b \backsim x)}{\cos x}$. Ma l'introduzione dell'arco ausiliario x non è a caso, ed è facile vedere che se dal vertice dell'angolo B si abbassi una perpendicolare (*fig*. 18) l'arco x sarà la base del triangolo rettangolo sul quale A è un'angolo alla base, ed il lato c l'ipotenusa. E per più chiarezza se dall'estremità del minore dei lati dati si abbassi sul maggiore b la perpendicolare p' il lato b sarà diviso in due segmenti x e $b - x$ ed il triangolo in due triangoli rettangoli. E ricorrendo al § 81 n°. 13 si avrà $\cos c = \cos p' \cos x$ e $\cos a = \cos p' \cos (b - x)$

onde $\cos p' = \frac{\cos c}{\cos x} = \frac{\cos a}{\cos (b-x)}, \ldots$ e però

$\cos a = \frac{\cos c \cos (b-x)}{\cos x}$ ma per la formola num°. 2, si ha $\tan x = \tan c \cos A$. Onde tutto il calcolo si riduce alle due formole;

$$\tan x = \tan c \cos A$$

$$\cos a = \frac{\cos c \cos (b-x)}{\cos x}$$

Bisognerà far cadere sempre la perpendicolare p' sul maggiore dei lati dati.

129 Se coi dati stessi si cerchi l'angolo C si ha (109 n.°3) $\tan A \operatorname{sen} x = \tan C \operatorname{sen} (b \backsim x)$ onde

$$\tan C = \frac{\tan A \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} (b \backsim x)}.$$

130. Si ha poi il terzo angolo colla regola dei seni

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}.$$

131. Dal § 116 si ha $2 sen^2 \frac{1}{2} A = \frac{\cos (b \backsim c) - \cos a}{\text{sen } b \text{ sen } c}$
e quivi, messo $1 - 2 sen^2 \frac{1}{2}$ in cambio di cos, avremo
$2 sen^2 \frac{1}{2} A \; sen\, b \; sen\, c = 2 sen^2 \frac{1}{2} a - 2 sen^2 \frac{1}{2} (b \backsim c)$
e quindi

$$sen \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left(sen^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) + sen^2 \tfrac{1}{2} A \; sen\, b \; sen\, c\right)}$$

$$= sen \tfrac{1}{2} (b \backsim c) \sqrt{\left(1 + \frac{\text{sen } b \text{ sen } c \text{ sen}^2 \;\; A}{\text{sen}^2 \frac{1}{2} (b \backsim c)}\right)}.$$

132. Dal § 117 si ha $2 cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\cos a - \cos (b+c)}{\text{sen } b \text{ sen } c}$;
$2 cos^2 \frac{1}{2} A \; sen\, b \; sen\, c = 2 sen^2 \frac{1}{2} (b+c) - 2 sen^2 \frac{1}{2} a$;
$sen^2 \frac{1}{2} a = \sqrt{\left(sen^2 \frac{1}{2} (b+c) - sen\, b \; sen\, c \; cos^2 \frac{1}{2} A\right)}$

$$= sen \tfrac{1}{2} (b+c) \sqrt{\left(1 - \frac{\text{sen } b \text{ sen } c \cos^2 \frac{1}{2} A}{\text{sen}^2 \frac{1}{2} (b+c)}\right)}.$$

133. Ecco due buone formole ma incommode al calcolo. Esse sono della forma generale $P(1 \pm q) = K$. Si facci nella 129ª $q = tan^2 x$; $K = P(1 + tan^2 x) = P\left(\frac{1}{cos^2 x}\right)$...*Gon.* 26...Perciò risulta $tan\, x = \sqrt{q}$.

Onde fatto $tan\, x = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} A}{\text{sen } \frac{1}{2} (b \backsim c)} \sqrt{sen\, b \;\; sen\, c}$,

si otterrà ... $sen \frac{1}{2} a = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (b \backsim c)}{\cos x}$.

134. Che se la differenza $b \backsim c$ sia piccola converrà meglio fare uso della formola 130. In tal caso
$K = P(1 - tan^2 x) = P \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = P\left(\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\right)$
Gon. 156 .... E quindi fatto

$tan\ x = \frac{\cos \frac{1}{2} A}{\text{sen}\ \frac{1}{2}(b+c)} \sqrt{sen\ b\ sen\ c}$, si otterrà ....

$sen\ \frac{1}{2} a = \frac{\cos 2x\ \text{sen}\ \frac{1}{2}(b+c)}{\cos^2 x}$.

135. Oppure, quando sia $K = P(1-q)$, facendo $q = cos^2 x$, sarà

$cos\ x = \frac{\cos \frac{1}{2} A}{\text{sen}\ \frac{1}{2}(b+c)} \sqrt{sen\ b\ sen\ c}$, e quindi

$sen\ \frac{1}{2} a = sen\ x\ sen\ \frac{1}{2}(b+c)$.

136. Essendo

$$cos\ a = cos\ b\ cos\ c + sen\ b\ sen\ c\ cos\ A,$$

sostituendo $1 - 2 sen^2 \frac{1}{2} A$, e facendo

$$sen\ b\ sen\ c = \tfrac{1}{2} cos\ \tfrac{1}{2}(b \backsim c) - \tfrac{1}{2} cos\ (b+c),$$

e fatte le riduzioni si otterrà

$$cos\, a = cos(b \backsim c) - sen^2 \tfrac{1}{2} A \big(cos(b \backsim c) - cos(b+c)\big)$$

$$= cos(b \backsim c) - cos(b \backsim c) sen^2 \tfrac{1}{2} A + cos(b+c) sen^2 \tfrac{1}{2} A$$

e finalmente

$$cos\ a = cos\ (b \backsim c)\ cos^2 \tfrac{1}{2} A + cos\ (b+c)\ sen^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$= cos\ (b \backsim c)\ cos^2 \tfrac{1}{2} A \left(1 + \frac{\cos (b+c) \tan^2 \frac{1}{2} A}{\cos (b \backsim c)}\right)$$

onde fatto $tan\ x = tan\ \frac{1}{2} A \sqrt{\left(\frac{\cos (b+c)}{\cos (b \backsim c)}\right)}$ si avrà

$$cos\ a = \frac{\cos (b \backsim c) \cos^2 \frac{1}{2} A}{\cos x}.$$

137. $cos\ a = 1 - 2 sen^2 \frac{1}{2} a =$

$1 - 2 sen^2 \frac{1}{2}(b \backsim c) - 2\ sen^2 \frac{1}{2}(b \backsim c)\ sen^2 \frac{1}{2} A +$

$2 sen^2 \frac{1}{2}(b+c)\ \text{sen}^2 \frac{1}{2} A$; onde

$$sen^2 \tfrac{1}{2} a = sen^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) - sen^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c)\, sen^2 \tfrac{1}{2} A + sen^2 \tfrac{1}{2} (b+c)\, sen^2 \tfrac{1}{2} A;$$ cioè

$$sen^2 \tfrac{1}{2} a = sen^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) cos^2 \tfrac{1}{2} A + sen^2 \tfrac{1}{2} (b+c) sen^2 \tfrac{1}{2} A$$

138. $cos\, a = 2 cos^2 \tfrac{1}{2} a - 1 =$

$$2 cos^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) - 1 - 2 cos^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c)\, sen^2 \tfrac{1}{2} A + 2 cos^2 \tfrac{1}{2} (b+c)\, sen^2 \tfrac{1}{2} A;$$ onde

$$cos^2 \tfrac{1}{2} a = cos^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) - cos^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c)\, sen^2 \tfrac{1}{2} A + cos^2 \tfrac{1}{2} (b+c)\, sen^2 \tfrac{1}{2} A;$$ cioè

$$cos^2 \tfrac{1}{2} a = cos^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) cos^2 \tfrac{1}{2} A + cos^2 \tfrac{1}{2} (b+c) sen^2 \tfrac{1}{2} A$$

139. E dividendo la 137 per la 138;

$$tan^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{sen^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) cos^2 \tfrac{1}{2} A + sen^2 \tfrac{1}{2} (b+c) sen^2 \tfrac{1}{2} A}{cos^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) cos^2 \tfrac{1}{2} A + cos^2 \tfrac{1}{2} (b+c) sen^2 \tfrac{1}{2} A}$$

$$= \frac{sen^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) + sen^2 \tfrac{1}{2} (b+c) tan^2 \tfrac{1}{2} A}{cos^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) + cos^2 \tfrac{1}{2} (b+c) tan^2 \tfrac{1}{2} A}$$

$$= \frac{sen^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) \left(1 + \dfrac{sen^2 \tfrac{1}{2} (b+c)}{sen^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c)} tan^2 \tfrac{1}{2} A\right)}{cos^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c) \left(1 + \dfrac{cos^2 \tfrac{1}{2} (b+c)}{cos^2 \tfrac{1}{2} (b \backsim c)} tan^2 \tfrac{1}{2} A\right)}$$

onde al solito fatto ..... $\dfrac{sen \tfrac{1}{2} (b+c)}{sen \tfrac{1}{2} (b \backsim c)} tan \tfrac{1}{2} A = tan\, x$

e $\dfrac{cos \tfrac{1}{2} (b+c)}{cos \tfrac{1}{2} (b \backsim c)} tan \tfrac{1}{2} A = tan\, y$, subito si avrà ...

$$tan \tfrac{1}{2} a = \frac{cos\, y}{cos\, x} tan \tfrac{1}{2} (b \backsim c) = \frac{cos\, y}{cos\, x} \times \frac{sen \tfrac{1}{2} (b \backsim c)}{cos \tfrac{1}{2} (b \backsim c)}.$$

Questa formola analoga alle Neperiane e non avvertita da altri la trovo sempre commoda breve e precisa, qualunque sia la grandezza del lato cercato. Se in vece di *log. tan* $\tfrac{1}{2} (b \backsim c)$ si scriva il *log. sen* $\tfrac{1}{2} (b \backsim c)$, e il *colog. cos* $\tfrac{1}{2} (b \backsim c)$ già trovati, viene risparmiata la ricerca di un logaritmo nell' ultima equazione. Molte altre formole per questo e pel seguente caso si possono vedere negli autori, ma esse sono più eleganti che utili nella pratica.

140. Ma un'altro vantaggio di quest'ultime formule si è, che rendono cogniti senza altri calcoli anche li due angoli ignoti. Perchè, come si dimostrerà qui appresso, si ha

$cot\ x = tan\ \frac{1}{2}(B \backsim C)$, e $cot\ y = tan\ \frac{1}{2}(B + C)$

Onde trovati x ed y, i loro complementi a 90° saranno, il primo la semidifferenza, e il secondo la semisomma degli angoli ignoti.

141. Di qui si vede che essendo dati due lati e l'angolo compreso tutti gli altri elementi del triangolo si trovano col seguente brevissimo metodo. Si calcoli

$$tan\ x = \frac{\tan \frac{1}{2} A \text{ sen } \frac{1}{2}(b+c)}{\text{sen } \frac{1}{2}(b \backsim c)},\ tan\ y = \frac{\tan \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(b \backsim c)}.$$

$$\ldots \frac{\cos y}{\cos x}\ tan\ \tfrac{1}{2}(b \backsim c) = tan\ \tfrac{1}{2}\ a = \text{lato cercato,}$$

$$90 - x = \tfrac{1}{2}(B \backsim C) = \tfrac{1}{2} Q;\ 90 - y = \tfrac{1}{2}(B + C) = \tfrac{1}{2} P$$

e quindi .... Angolo maggiore $= \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q$

Angolo minore $= \frac{1}{2} P - \frac{1}{2} Q$

Con dieci logaritmi presi dalle tavole, e due non altro che copiati dalle prime due analogie si conosceranno li sei elementi del triangolo.

142. Dati come prima, *due lati* e *l'angolo compreso* si cerca *uno degli angoli*.

Dal sist. 5° si ha

$$sen\ A\ cot\ C = sen\ b\ cot\ c - cos\ b\ cos\ A$$

$$cot\ C = \frac{\text{sen } b \cot c - \cos b \cos A}{\text{sen } A}$$

$$1^\circ\ tan\ C = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } b \cot c - \cos b \cos A}$$

$$= \frac{\text{sen } B}{\text{sen } a \cot c - \cos a \cos B}$$

$$2^{\circ}\ \tan A = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } c \cot a - \cos c \cos B}$$

$$= \frac{\text{sen } C}{\text{sen } b \cot a - \cos b \cos C}$$

$$3^{\circ}\ \tan B = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } a \cot b - \cos a \cos C}$$

$$= \frac{\text{sen } A}{\text{sen } c \cot b - \cos c \cos A}$$

143. Gli astronomi da tempo immemorabile adoperano il seguente metodo.

$$\cot C = \frac{\text{sen } b \cot c - \cos b \cos A}{\text{sen } A}$$

$$= \frac{\cos A}{\text{sen } A}\left(\frac{\cot c \text{ sen } b}{\cos A} - \cos b\right)$$

$$= \cot A \left(\frac{\cot c}{\cos A} \times \text{sen } b - \cos b\right)$$ si facci

$\frac{\cot c}{\cos A} = \cot x$, sarà $\cot C = \cot A(\cot x \text{ sen } b - \cos b)$

$$= \cot A \left(\frac{\cos x \text{ sen } b - \text{sen } x \cos b}{\text{sen } x}\right)$$

$$= \cot A \left(\frac{\text{sen }(b-x)}{\text{sen } x}\right).$$

Onde il calcolo, che riesce brevissimo, si riduce alle seguenti due analogie

$$\tan x = \cos A \tan c \ \ldots\ \tan C = \frac{\tan A \text{ sen } x}{\text{sen }(b-x)}.$$

Abbassando una perpendicolare dall' estremità del minore dei lati conosciuti sul maggiore, qui da B su di b, sarà x la base del triangolo rettangolo di cui c

è l' ipotenusa, ed A l' angolo alla base. Si applichi lo stesso ragionamento agli altri angoli.

144. Quando con questo metodo si è calcolato uno dei due angoli ignoti si avrà l'altro colla regola dei seni, perchè $sen\ B = \frac{sen\ b\ sen\ C}{sen\ c}$.

145. E se si cercasse pure il terzo lato, 109 n.° 5. $\frac{\cos c}{\cos x} = \frac{\cos a}{\cos (b-x)}$, si avrà $\cos a = \frac{\cos c \cos (b-x)}{\cos x}$.

146. Nei due triangoli rettangoli formati dalla perpendicolare abbassata dall'angolo dato A, per il § 109 num.° 2, si ha $\tan c \cos N = \tan b \cos M$, e

Gon. 159. 168, $\frac{\tan b + \tan c}{\tan b \backsim \tan c} = \frac{\cos M + \cos N}{\cos M \backsim \cos N} =$

$\frac{sen (b+c)}{sen (b \backsim c)} = \frac{\cot \frac{1}{2} (M+N)}{\tan \frac{1}{2} (M \backsim N)} = \frac{\cot \frac{1}{2} A}{\tan \frac{1}{2} (M \backsim N)} \cdots\cdots$

perchè $\frac{1}{2} (M+N) = \frac{1}{2} A$. Onde

$$\tan \tfrac{1}{2} (M \backsim N) = \frac{\cot \frac{1}{2} A\ sen (b \backsim c)}{sen (b+c)}.$$

E così si hanno dell'angolo A

il segmento maggiore $= \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} (M \backsim N)$,

il segmento minore $= \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} (M \backsim N)$.

Ottenuti i segmenti M, N, si calcolerà

$\cot B = \tan M \cos c \ \ldots\ \cot C = \tan N \cos b$.

147. L' analogia fa vedere che il segmento maggiore è adjacente al lato maggiore, il minore al minore, purchè si abbia riguardo al segno di $sen (b+c)$.

148. Se a questi si uguaglino i valori di $\cot B$ e di $\cot C$ dati sopra si avranno i valori analitici dei segmenti espressi nei lati del triangolo: così si trovano facilmente

$$tan\ M = \frac{\tan c \cot b - \cos A}{\text{sen}\ A}$$

$$tan\ N = \frac{\tan b \cot c - \cos A}{\text{sen}\ A}$$

149. Dall'angolo dato A abbassata la perpendicolare, dai due triangoli rettangoli per il § 109 n°. 1 si ha $sen\ b\ sen\ C = sen\ c\ sen\ B$; la quale sciolta, ed ordinata darà; $\frac{\text{sen}\ b + \text{sen}\ c}{\text{sen}\ b \backsim \text{sen}\ c} = \frac{\text{sen}\ B + \text{sen}\ C}{\text{sen}\ B \backsim \text{sen}\ C} =$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(b+c)}{\tan \frac{1}{2}(b \backsim c)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(B+C)}{\tan \frac{1}{2}(B \backsim C)}.$$

Ma al § 124, si ebbe colli stessi dati $tan\ \frac{1}{2}(B+C) = \frac{\tan \frac{1}{2}(M \backsim N)}{\tan \frac{1}{2} A \tan \frac{1}{2}(B \backsim C)}$, e al § 136 si è trovato $tan\ \frac{1}{2}(M \backsim N) = \frac{\cot \frac{1}{2} A\ \text{sen}\ (b \backsim c)}{\text{sen}\ (b+c)}$, e per conseguenza $tan\ \frac{1}{2}(B+C) = \frac{\cot^2 \frac{1}{2} A\ \text{sen}\ (b \backsim c)}{\text{sen}\ (b+c) \tan \frac{1}{2}(B \backsim C)}$; sostituendo questo valore di $tan\ (B+C)$ nella equazione di sopra si avrà

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(b+c)}{\tan \frac{1}{2}(b \backsim c)} = \frac{\cot^2 \frac{1}{2} A\ \text{sen}\ (b \backsim c)}{\text{sen}\ (b+c) \tan^2 \frac{1}{2}(B \backsim C)} \quad \text{oppure}$$

$$tan^2\ \frac{1}{2}(B \backsim C) = \frac{\cot^2 \frac{1}{2} A\ \text{sen}\ (b \backsim c) \tan \frac{1}{2}(b \backsim c)}{\text{sen}\ (b+c) \tan \frac{1}{2}(b+c)}.$$

Quivi sciolti li *seni* in $2\,sen\ \frac{1}{2}\ cos\ \frac{1}{2}$, e le $tan\ \frac{1}{2}$, in $\frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}}{\cos \frac{1}{2}}$ si otterrà

$$tan^2\tfrac{1}{2}(B \backsim C) = \frac{\cot^2\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}(b \backsim c)\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b \backsim c)}{\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b \backsim c)}$$

$$= \frac{\cot^2\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}(b \backsim c)}{\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}(b+c)}$$

da cui estratte le radici si ha finalmente

$$tan\tfrac{1}{2}(B \backsim C) = \frac{\cot\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}(b \backsim c)}{\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}(b+c)} = tan\tfrac{1}{2}Q$$

Ma nella prima equazione si ebbe

$$tan\tfrac{1}{2}(B \backsim C) = \frac{\tan\tfrac{1}{2}(B+C)\tan\tfrac{1}{2}(b \backsim c)}{\tan\tfrac{1}{2}(b+c)}$$

$$= \frac{\tan\tfrac{1}{2}(B+C)\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}(b \backsim c)\cos\tfrac{1}{2}(b+c)}{\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b \backsim c)},$$

comparando questi due valori e riducendo si otterrà

$$tan\tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\cot\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b \backsim c)}{\cos\tfrac{1}{2}(b+c)} = tan\tfrac{1}{2}P$$

Così si conosceranno con queste facili e brevi formole la semidifferenza $\tfrac{1}{2}Q$, e la semisomma $\tfrac{1}{2}P$ degli angoli cercati B e C. Sarà quindi di questi due angoli il maggiore $= \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q$, ed il minore $= \tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Q$. Questa soluzione che è di Nepero, ha il doppio vantaggio della brevità e della facilità del calcolo. Da essa siegue l'uguaglianza di due triangoli sferici che abbiano rispettivamente uguali due lati e due angoli opposti. E poichè $tan\tfrac{1}{2}(B+C)$ e $cos\tfrac{1}{2}(b+c)$ nella formola hanno lo stesso segno, è chiaro, che in ogni triangolo sferico sono della medesima specie la semisomma dei lati e la semisomma degli angoli opposti.

150. Furono trovate per altra strada, ma rovesciate, queste formole di Nepero, le quali diedero li valori di $tan\, x$, e di $tan\, y$ al § 139. E ciò in conferma di quanto si disse al § 140.

151. Dopo ottenuti li due angoli B, e C colle formole di Nepero, dalle medesime si ha il terzo lato. Si trovò al § 119,

$$tan\,\tfrac{1}{2}(b+c)=\frac{\tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}(m\backsim n)}{\tan\frac{1}{2}(b\backsim c)},$$ ed al § 138 ...

$$tan\,\tfrac{1}{2}(b+c)=\frac{\tan\frac{1}{2}(b\backsim c)\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B\backsim C)},$$ da cui risulta

$$tan\,\tfrac{1}{2}(m\backsim n)=\frac{\cot\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}(B+C)\tan^2\frac{1}{2}(b\backsim c)}{\tan\frac{1}{2}(B\backsim C)}.$$

Ma al § 153 si ebbe

$$tan\,\tfrac{1}{2}(m\backsim n)=\frac{\tan\frac{1}{2}a\,\mathrm{sen}\,(B\backsim C)}{\mathrm{sen}\,(B+C)}$$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}a\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(B\backsim C)\cos\frac{1}{2}(B\backsim C)}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C)},$$

uguagliati questi due valori di $tan\,\frac{1}{2}(m\backsim n)$, e fatte le riduzioni si otterrà

$$tan^2\,\tfrac{1}{2}a\,sen^2\,\tfrac{1}{2}(B\backsim C)=tan^2\,\tfrac{1}{2}(b\backsim c)\,sen^2\,\tfrac{1}{2}(B+C)$$

e finalmente dopo estratta la radice

$$tan\,\tfrac{1}{2}a=\frac{\tan\frac{1}{2}(b\backsim c)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(B+C)}{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(B\backsim C)}.$$

152. 4° Caso. Dato *un lato ed i due angoli adjacenti* si può cercare uno dei lati opposti agli angoli conosciuti, oppure il terzo angolo.

Si cerchi *uno dei lati*. Il sistema 5° darà

$$tan\;b=\frac{\mathrm{sen}\,a}{\mathrm{sen}\,C\cot B+\cos C\cos a}$$

$$tan\;c=\frac{\mathrm{sen}\,b}{\mathrm{sen}\,A\cot C+\cos A\cos b}$$

$$tan\;a=\frac{\mathrm{sen}\,c}{\mathrm{sen}\,B\cot A+\cos B\cos c}$$

153. Si rovescino le formole precedenti: la prima darà ... $cot\ b = \frac{\text{sen } C \cot B + \cos C \cos a}{\text{sen } a}$

$$= \frac{\cos a}{\text{sen } a}\left(\cos C + \frac{\cot B \text{ sen } C}{\cos a}\right)$$

si facci $\frac{\cot B}{\cos a} = tan\ x$, e si avrà

$$cot\ b = \frac{\cos a}{\text{sen } a}(cos\ C + tan\ x\ sen\ C)$$

$$= cot\ a\left(\frac{\cos C \cos x + \text{sen } C \text{ sen } x}{\cos x}\right) = \frac{\cot a \cos(c - x)}{\cos x}$$

onde cercando prima $tan\ x = \frac{\cot B}{\cos a}$, si avrà subito $tan\ b = \frac{\tan a \cos x}{\cos(C - x)}$ ... Questa è la soluzione astronomica.

154. Colla regola de' seni si può ora trovare l'altro lato perchè $sen\ c = \frac{\text{sen } C \text{ sen } b}{\text{sen } B}$.

155. Colla regola stessa si può trovare il terzo angolo, perchè ... $sen\ A = \frac{\text{sen } B \text{ sen } a}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C \text{ sen } a}{\text{sen } c}$.

156. A causa de' due triangoli rettangoli formati dalla perpendicolare abbassata sul lato conosciuto, § 109 n.° 3, si ha $sen\ m\ tan\ B = sen\ n\ tan\ C$, e quindi al solito ... $\frac{\text{sen } m + \text{sen } n}{\text{sen } m \backsim \text{sen } n} = \frac{\tan B + \tan C}{\tan B \backsim \tan C} =$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(m + n)}{\tan \frac{1}{2}(m \backsim n)} = \frac{\text{sen }(B + C)}{\text{sen }(B \backsim C)},$$

e quindi ... $tan \frac{1}{2}(m \backsim n) = \frac{\tan \frac{1}{2} a \operatorname{sen}(B \backsim C)}{\operatorname{sen}(B+C)}$, da questa si hanno li due segmenti del lato dato, perchè sarà

il segmento maggiore $= \frac{1}{2} a + \frac{1}{2}(m \backsim n)$

il segmento minore $= \frac{1}{2} a - \frac{1}{2}(m \backsim n)$

Avuto riguardo al segno di $sen\,(B+C)$, e sovvenendosi § 109 n.° 3, che il maggior segmento è dal canto del minore angolo, e il minor segmento dal canto del maggiore angolo, si avrà il lato cercato, for.ª 11.ª

$$cot\ c = cot\ m\ cos\ B \ \ldots\ cot\ b = cot\ n\ cos\ C$$

157. Se si volessero espressi nei dati del triangolo li due segmenti, uguagliando li due valori di $cot\ b$ e di $cot\ c$ dei § 149 e 153 si troverà

$$cot\ m = \frac{\tan B \cot C + \cos a}{\operatorname{sen} a}, \quad \text{e}$$

$$cot\ n = \frac{\tan C \cot B + \cos a}{\operatorname{sen} a}.$$

158. Ma col metrdo di Nepero si possono trovare ad un tempo li due lati ignoti. E questa soluzione è preferibile per la brevità e per l'utilità.

Al § 151 si è dimostrato che

$$tan\ \tfrac{1}{2}\ a = \frac{\tan \frac{1}{2}(b \backsim c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(B \backsim C)}$$

e quindi coi dati che abbiamo si ottiene

$$tan\ \tfrac{1}{2}(b \backsim c) = \frac{\tan \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B \backsim C)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(B+C)} = tan\ \tfrac{1}{2}\ Q$$

Ma dal § 138 si ha pure

$tan\ \frac{1}{2}(b \backsim c) = \frac{\tan \frac{1}{2}(b+c) \tan \frac{1}{2}(B \backsim C)}{\tan \frac{1}{2}(B+C)}$, paragonati

questi due valori, e riflettendo che $\frac{\text{sen}}{\tan} = cos$, si ottiene

$$tan\ \frac{1}{2}(b+c) = \frac{\tan \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2}(B \backsim C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)} = tan\ \frac{1}{2} P$$

Sarà quindi il lato maggiore $= \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q$; e il minore $= \frac{1}{2} P - \frac{1}{2} Q$.

159. Quando fossero dati due lati e li due angoli opposti, e si cercasse il terzo lato le precedenti formole somministrano § 151.

$$tan\ \frac{1}{2} a = \frac{\tan \frac{1}{2}(b \backsim c) \text{ sen } \frac{1}{2}(B+C)}{\text{sen } \frac{1}{2}(B \backsim C)}$$

$$= \frac{\tan \frac{1}{2}(b+c) \cos \frac{1}{2}(B+C)}{\cos \frac{1}{2}(B \backsim C)}.$$

160. Si calcola ancora il terzo angolo con una delle Neperiane § 149

$$tan\ \frac{1}{2} A = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(b \backsim c) \cot \frac{1}{2}(B \backsim C)}{\text{sen } \frac{1}{2}(b+c)}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(b \backsim c) \cot \frac{1}{2}(B+C)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)}.$$

161. Dati, come sopra *un lato* ed *i due angoli adjacenti* si cerca *l'angolo opposto al lato dato*, che è il terzo angolo. Il sistema 6° darà

$$cos\ A = cos\ a\ sen\ B\ sen\ C - cos\ B\ cos\ C$$
$$cos\ B = cos\ b\ sen\ A\ sen\ C - cos\ A\ cos\ C$$
$$cos\ C = cos\ c\ sen\ A\ sen\ B - cos\ A\ cos\ B$$

162. Se si facesse $\cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} x$, e $\cos C \cos B = \operatorname{sen} y$, essendo x, y, due archi indeterminati, sarà

$$\cos A = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x-y) \cos \tfrac{1}{2}(x+y)$$

163. Se si facesse però $\cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \tan x'$ e $\cos B \cos C = \tan y'$ sarà

$$\cos A = \tan x' - \tan y' = \frac{\operatorname{sen}(x'-y')}{\cos x' \cos y'}. \quad Gon. \ 181$$

Queste due trasformazioni della formola analitica fanno evitare l'uso dei logaritmi dei numeri naturali.

164. Si divida la formula analitica per $\cos C$ ed avremo $\frac{\cos A}{\cos C} = \cos a \operatorname{sen} B \tan C - \cos B =$

$$\cot x \operatorname{sen} B - \cos B = \frac{\cos x \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} x \cos B}{\operatorname{sen} x} =$$

$\frac{\operatorname{sen}(B-x)}{\operatorname{sen} x}$; onde $\cos A = \frac{\cos C \operatorname{sen}(B-x)}{\operatorname{sen} x}$, dove si fa $\cot x = \cos a \tan C$. Si vede che l'angolo ausiliario x è alla sommità di quello dei due triangoli rettangoli formati dalla perpendicolare, nel quale a è l'ipotenusa, e C l'angolo alla base. Questo è il metodo astronomico.

165. .... $1 - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A =$

$$\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C =$$

$$-\cos(B+C) - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C =$$

$$-2\cos^2 \tfrac{1}{2}(B+C) + 1 - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C; \text{ onde}$$

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \cos^2 \tfrac{1}{2}(B+C) + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$$

$$= \cos^2 \tfrac{1}{2}(B+C) \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\cos^2 \tfrac{1}{2}(B+C)}\right)$$

166. ...... $sen^2 \frac{1}{2} A = cos^2 \frac{1}{2} (B+C) +$

$sen^2 \frac{1}{2} a \left(\frac{1}{2} cos\,(B-C) - \frac{1}{2} cos\,(B+C) \right) =$

$cos^2 \frac{1}{2} (B+C) + sen^2 \frac{1}{2} a\, cos^2 \frac{1}{2} (B-C) - \frac{1}{2} sen^2 \frac{1}{2} a$

$- sen^2 \frac{1}{2} a\ cos^2 \frac{1}{2} (B+C) + \frac{1}{2} sen^2 \frac{1}{2} a =$

$sen^2 \frac{1}{2} a\ cos^2 \frac{1}{2} (B-C) + cos^2 \frac{1}{2} a\ cos^2 \frac{1}{2} (B+C)$

e finalmente ... $sen \frac{1}{2} A$

$$= sen \tfrac{1}{2} a\, cos \tfrac{1}{2} (B-C) \sqrt{\left(1 + \frac{cot^2 \frac{1}{2} a\, cos^2 \frac{1}{2} (B+C)}{sen^2 \frac{1}{2} (B-C)} \right)}$$

167. .... $2 cos^2 \frac{1}{2} A - 1 = - cos\,(B+C)$
$- 2\, sen^2 \frac{1}{2} a\ sen\ B\ sen\ C$

onde ... $2 cos^2 \frac{1}{2} A =$

$1 - 1 + 2 sen^2 \frac{1}{2} (B+C) - 2 sen^2 \frac{1}{2} a\, sen\ B\ sen\ C;$

$cos^2 \frac{1}{2} A = sen^2 \frac{1}{2} (B+C) - sen^2 \frac{1}{2} a\ sen\ B\ sen\ C$

$$= sen^2 \tfrac{1}{2} (B+C) \left(1 - \frac{sen^2 \frac{1}{2} a\ sen\ B\ sen\ C}{sen^2 \frac{1}{2} (B+C)} \right)$$

168. ...... $cos^2 \frac{1}{2} A = sen^2 \frac{1}{2} (B+C) -$

$sen^2 \frac{1}{2} a \left(\frac{1}{2} cos\,(B-C) - \frac{1}{2} cos\,(B+C) \right) =$

$sen^2 \frac{1}{2} (B+C) - \frac{1}{2} sen^2 \frac{1}{2} a + sen^2 \frac{1}{2} a\, sen^2 \frac{1}{2} (B-C)$

$+ \frac{1}{2} sen^2 \frac{1}{2} a - sen^2 \frac{1}{2} a\ sen^2 \frac{1}{2} (B+C) =$

$sen^2 \frac{1}{2} a\ sen^2 \frac{1}{2} (B-C) + cos^2 \frac{1}{2} a\ sen^2 \frac{1}{2} (B+C)$

e finalmente ... $cos \frac{1}{2} A$

$$= sen \tfrac{1}{2} a\ sen\,(B-C) \sqrt{\left(1 + \frac{cot^2 \frac{1}{2} a\ sen^2 \frac{1}{2} (B+C)}{sen^2 \frac{1}{2} (B-C)} \right)}$$

169. Dividendo la 166ª per la 168ª

$$tan\,\tfrac{1}{2}A = cot\,\tfrac{1}{2}(B-C)\sqrt{\left(\frac{1+\dfrac{cot^2\frac{1}{2}a\,cos^2\frac{1}{2}(B+C)}{cos^2\frac{1}{2}(B-C)}}{1+\dfrac{cot^2\frac{1}{2}a\,sen^2\frac{1}{2}(B+C)}{sen^2\frac{1}{2}(B-C)}}\right)}$$

E perciò adoperando il solito gioco delle tangenti, si facci

$$\frac{cot\,\frac{1}{2}a\,cos\,\frac{1}{2}(B+C)}{cos\,\frac{1}{2}(B+C)} = tan\,x,$$

$$\frac{cot\,\frac{1}{2}a\,sen\,\frac{1}{2}(B+C)}{sen\,\frac{1}{2}(B-C)} = tan\,y,$$

$$tan\,\tfrac{1}{2}A = \frac{cos\,y}{cos\,x}\,cot\,\tfrac{1}{2}(B-C)$$

170. 5° Caso. Dati *due lati*, e *un angolo opposto ad uno di essi*, si può cercare 1° *l'angolo opposto all'altro*; 2° *l'angolo che essi contengono*; 3° *il terzo lato*.

171. Si cerchi *l'angolo opposto all'altro lato*. Il sistema 4° darà.

$$1^\circ\ sen\,A = \frac{sen\,B\,sen\,a}{sen\,b} = \frac{sen\,C\,sen\,a}{sen\,c}$$

$$2^\circ\ sen\,B = \frac{sen\,C\,sen\,b}{sen\,c} = \frac{sen\,A\,sen\,b}{sen\,a}$$

172. Non vi è altra soluzione, e la natura del seno fa che questa stessa sia dubbia, non sapendosi se l'angolo cercato sia A, o $180^\circ - A$. Perciò questo, e il seguente caso sono dubbj di loro natura; ma nel maggior numero degl'incontri il dubbio sarà tolto facendo attenzione a quanto abbiamo dimostrato nel § 52 che il maggior lato è opposto al maggior

angolo, e il minore al minore. E al § 149 che la semisomma di due lati, e la semisomma degli angoli opposti sono della stessa specie.

173. Da questi teoremi ne seguono questi altri tre:

1° Se la somma dei lati dati è minore di 180° sarà acuto l'angolo opposto al lato minore.

2° Se la detta somma è maggiore di 180° sarà ottuso l'angolo opposto al lato maggiore.

3° Se somma è uguale a 180° sarà pure 180° la somma degli angoli opposti.

174. Cogli stessi dati trovare *l'angolo contenuto fra i lati dati.* Il sistema 5° darà

$$cot\ c\ sen\ b = cos\ A\ cos\ b + sen\ A\ cot\ C$$

$$cot\ a\ sen\ c = cos\ B\ cos\ c + sen\ B\ cot\ A$$

$$cot\ b\ sen\ c = cos\ B\ cos\ a + sen\ C\ cot\ B$$

175. Si ha qui il seno e il coseno dell'angolo contenuto che si cerca; si faccia

$$cot\ c\ sen\ b = cos\ b\left(\frac{\cot C \text{ sen } A}{\cos b} + \cos A\right)$$

$$cot\ c\ tan\ b = \frac{\cot C \text{ sen } A}{\cos b} + cos\ A = tan\ x\ sen\ A + cos\ A$$

$$= \frac{\text{sen } x \text{ sen } A + \cos x \cos A}{\cos x} = \frac{\cos (A-x)}{\cos x} = \frac{\cos (x-A)}{\cos x}$$

Fatto .... $tan\ x = \frac{\cot c}{\cos b}$; sarà

$$cos\ (A-x) = cos\ x \times tan\ b\ cot\ c = cos\ (x-A)$$

Perciò $A = x + (A-x)$; oppure $A = x - (x-A)$

Si vede che non si sa se debba adottarsi $x - A$ o $A - x$; solamente si deduce dalla formula che il valor che si trova deve essere positivo.

176. Dati, come sopra, *due lati* e *l' angolo opposto* ad uno di essi trovare il *terzo lato*. Dal sistema 3° si ha

$$\cos a = \cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \cos b \cos c$$

$$\cos b = \cos B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c + \cos a \cos c$$

$$\cos c = \cos C \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b$$

Siamo nelle stesse circostanze del caso precedente, perche l'incognita è espressa pel suo seno, e pel suo coseno: si divida la prima equazione per $\cos c$ e si avrà ... $\frac{\cos a}{\cos c} = \cos A \operatorname{sen} b \tan c + \cos b =$

$$\tan x \operatorname{sen} b + \cos b = \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} b + \cos x \cos b}{\cos x} =$$

$$\frac{\cos(b-x)}{\cos x} = \frac{\cos(x-b)}{\cos x}.$$

Fatto dunque $\cos A \tan c = \tan x$; si ha $\cos(x-b)$ o $\cos(b-x) = \frac{\cos a \cos x}{\cos c}$;

Onde $b = x + (b-x) = x - (x-b)$. Sarà x la base del triangolo rettangolo nel quale A è l'angolo alla base, e c l' ipotenusa. Si vedono in questo gli stessi dubbj del problema precedente.

177. 6° Caso. Dati *due angoli* ed un *lato opposto* ad uno di essi si può cercare; 1° il *lato opposto all'altro* degli angoli dati; 2° il *lato su cui giacciono*; 3° il *terzo angolo*.

Si trova il *lato opposto all'altro angolo dato* colla regola dei seni

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

$$sen\ b = \frac{\text{sen } B.\text{sen } c}{\text{sen } C} = \frac{\text{sen } B \text{ sen } a}{\text{sen } A}$$

Si vede bene che siamo negli stessi dubbj del 5° caso. Per togliere in molti casi il dubbio giovano (ma quasi sempre dopo eseguiti i calcoli) i teoremi colà stabiliti.

178. Cogli stessi dati si cerchi il *lato compreso tra gli angoli conosciuti*. Il sistema 5° ci ha dato al num.° 1°

$$sen\ A\ cot\ C = cot\ c\ sen\ b - cos\ A\ cos\ b$$

e dividendo per $cos\ A$

$$tan\ A\ cot\ C = \frac{\cot c \text{ sen } b}{\cos A} - cos\ b = cot\ x\ sen\ b - cos\ b$$

$$= \frac{\cos x \text{ sen } b - \text{sen } x \cos b}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen } (b-x)}{\text{sen } x};$$ onde fatto

$\frac{\cot c}{\cos A} = cot\ x$, o pure $cos\ A\ tan\ c = tan\ x$ si avrà $sen\ (b-x) = sen\ x\ tan\ A\ cot\ C$. Non si può prima del calcolo giungere ad assegnare la specie di $b - x$ come è chiaro.

179. Coi medesimi dati, cioè con *due angoli* ed il *lato apposto* ad uno di essi, si cerchi il *terzo angolo*. Dal sistema 6° si ebbe

$$cos\ A = cos\ a\ sen\ B\ sen\ C - cos\ B\ cos\ C$$

e dividendo per $cos\ B$ viene al solito $\frac{\cos A}{\cos B} =$

$$cos\ a\ tan\ B\ sen\ C - cos\ C = cot\ x\ sen\ C - cos\ C$$

$$= \frac{\cos x \text{ sen } C - \text{sen } x \cos C}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen } (C-x)}{\text{sen } x}.$$ Perciò

$$cot\ x = cos\ a\ tan\ B\ \ldots\ldots\ sen\,(C-x) = \frac{sen\ x\ cos\ A}{cos\ b}$$

onde qui si vede ancora che non si sa se $C-x$ sia angolo acuto o ottuso.

180. Si è veduto che nelle soluzioni trigonometriche resta sempre dubbia, a meno che le circostanze non tolgano l'ambiguità, la specie dell'incognita ogni qualvolta essa si calcola per mezzo del seno, o quando essa trovasi espressa dal suo seno, e dal suo coseno insieme. Nel primo caso non si sa la specie perchè $sen\ x = sen\ (180-x)$; nel secondo l'incognita si divide sempre in due segmenti, la cui differenza non si sa se sia $M-N$, o pure $N-M$.

Non vi sono in tal caso che i seguenti tre teoremi per togliere l'ambiguità in certe circostanze. 1° Che l'angolo maggiore è sempre opposto al lato maggiore. 2° Che la somma di due segmenti deve essere sempre minore di 180°. 3° Che gli angoli e i lati devono essere necessariamente positivi, e quali sono dati dalle formule che l'esprimono.

Considerazioni su la composizione delle formole che servono alla risoluzione de' triangoli.

181. Le formole trigonometriche che servono nella p.atica sono generalmente costruite in modo che fanno trovare un'elemento incognito del triangolo per mezzo di tre altri conosciuti. L'equazione primitiva da cui derivano li sistemi generali non rappresenta che il rapporto di due elementi identico a quello di due altri. Che se qualche volta s'introduce un quinto elemento, non è mai isolato, ma trovasi unito per somma o per differenza col suo simile, ed obbliga alla stessa unione altri due elementi simili: di modo che l'equa-

zione ritorna sempre a rappresentare il rapporto di due quantità identico a quello di due altre. Tali sono le formole di Nepero. Ma giova in molti incontri conoscere la relazione che passa tra cinque, e anche tra tutte le sei parti del triangolo.

181. Sciogliendo le cotangenti del sistema 5°, ed ordinando avremo

$$\frac{\text{sen } c \text{ sen } A \cos C}{\text{sen } C} = \text{sen } b \cos c - \cos b \text{ sen } c \cos A$$

$$\frac{\text{sen } a \text{ sen } B \cos A}{\text{sen } A} = \text{sen } c \cos a - \cos c \text{ sen } a \cos B$$

$$\frac{\text{sen } b \text{ sen } C \cos B}{\text{sen } B} = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b \cos C$$

182. Sostituendo nelli primi membri li valori di *sen a*, *sen b*, *sen c*, somministrati dall'equazioni del sist. 4° si convertiranno nelle seguenti

1ª $\text{sen } a \cos C = \text{sen } b \cos c - \cos b \text{ sen } c \cos A$

2ª $\text{sen } b \cos A = \text{sen } c \cos a - \cos c \text{ sen } a \cos B$

3ª $\text{sen } c \cos B = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b \cos C$

Queste equazioni mostrano le relazioni tra cinque elementi del triangolo.

183. Nella equazione n°. 1° si sostituisca .... $\text{sen } b = \frac{\text{sen } c \text{ sen } B}{\text{sen } C}$ nel primo termine del secondo membro, e si moltiplichi il secondo per $\frac{\text{sen } C}{\text{sen } C}$ essa diverrà ...... $\frac{\text{sen } c \text{ sen } A \cos C}{\text{sen } C} = \frac{\text{sen } c \text{ sen } B \cos c}{\text{sen } C} - \frac{\cos b \text{ sen } c \cos A \text{ sen } C}{\text{sen } C}$, la quale divisa per $\frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$ darà

$sen\ A\ cos\ C = sen\ B\ cos\ c - cos\ b\ cos\ A\ sen\ C$,

d'onde le tre equazioni

1ª $sen\ B\ cos\ c = sen\ A\ cos\ C + cos\ A\ sen\ C\ cos\ b$

2ª $sen\ C\ cos\ a = sen\ B\ cos\ A + cos\ B\ sen\ A\ cos\ c$

3ª $sen\ A\ cos\ b = sen\ C\ cos\ B + cos\ C\ sen\ B\ cos\ a$

Anche queste equazioni mostrano la relazione tra cinque elementi del triangolo: si troverebbero egualmente portando quelle del § precedente nel triangolo supplementario, come si può verificare colli § 53 e 70, e facendo attenzione ai segni.

184. Ora le formole trigonometriche, come generalmente tutte le altre formole matematiche, non rappresentano che li rapporti generali semplici o composti delle diverse parti del triangolo. Si conservino costanti questi rapporti, e le formole si possono variare da un'elemento all'altro. Così, per esempio, la

for. $sen\ a = \frac{sen\ A\ sen\ b}{sen\ B}$ dice che il *seno di un lato*

è uguale al *seno dell'angolo opposto* moltiplicato per il seno di *un'altro lato* diviso dal *seno dell'angolo che gli è opposto*. Perciò, si conservi il seno dell'angolo opposto, e si moltiplichi per il seno del terzo lato diviso per il seno del suo angolo opposto; e sarà

anche $sen\ a = \frac{sen\ A\ sen\ c}{sen\ C}$. Nelle due espressioni, il

fattore del seno dell'angolo opposto all'angolo cercato resta sempre il seno di un lato diviso pel seno del suo corrispondente angolo opposto : sebbene nella prima questo fattore trovisi ordinato rispetto al lato b, e nell'altra rispetto al lato c.

185. Serva a ciò di dimostrazione un'altro esempio. Al § 68 in cambio di $sen\ A = \frac{sen\ a\ sen\ B}{sen\ b}$, si poteva sostituire $sen\ A = \frac{sen\ a\ sen\ C}{sen\ c}$, ne sarebbe uscito

$$cot\ A = \frac{cos\ a - cos\ b\ cos\ c}{sen\ b\ sen\ c} \times \frac{sen\ c}{sen\ a\ sen\ C} = \frac{cos\ a - cos\ b\ cos\ c}{sen\ a\ sen\ b\ sen\ C}$$

o sia .... $sen\ C\ cot\ A = \frac{cos\ a - cos\ b\ cos\ c}{sen\ a\ sen\ b}$. Si noti, che il numeratore è sempre formato dal coseno del lato opposto all'angolo cercato meno il prodotto dei coseni degli altri due lati; ma il denominatore è il prodotto del seno dello stesso lato opposto all'angolo cercato per il seno di uno degli altri due lati, e per il seno dell'angolo opposto al terzo lato. Onde il valere di $cot\ A$ risulta egualmente giusto, perchè si sono conservati i rapporti. E proseguendo il processo del § stesso, al coseno del lato, il cui angolo opposto trovasi al denominatore, si sostituisca il suo valore, qui $cos\ c = cos\ b\ cos\ a + sen\ b\ sen\ a\ cos\ C$ si avrà

$$sen\ C\ cot\ A = \frac{cos\ a - cos^2\ b\ cos\ a - cos\ b\ sen\ b\ sen\ a\ cos\ C}{sen\ a\ sen\ b}$$

$$= \frac{cos\ a\ sen^2\ b - cos\ b\ sen\ b\ sen\ a\ cos\ C}{sen\ a\ sen\ b}$$

$$= cot\ a\ sen\ b - cos\ b\ cos\ C$$

dalla quale si avrà il valore di

$$cot\ A = \frac{cot\ a\ sen\ b - cos\ b\ cos\ C}{sen\ C}$$

dalla 2ª del sist. 5°... $\cot A = \frac{\cot a \,\text{sen}\, c - \cos c \cos B}{\text{sen}\, B}$

si vede, che sempre la *cotangente di un' angolo* è uguale ad un rapporto, il cui numeratore è formato dalla *cotangente del lato ad esso opposto* moltiplicata per *il seno di un lato*; meno il *coseno di questo stesso lato* moltiplicato per il *coseno dell' angolo ad esso adjacente*, e il denominatore ne è il *seno dell'angolo stesso* il cui coseno è nel numeratore.

186. Onde il sist. 5° darà altre tre formole quando la cotangente del lato opposto all' angolo cercato si metta in rapporto col seno del terzo lato in vece del secondo. Esse saranno; vedi § 68.

1ª $\cos B \cos a = \cot c \,\text{sen}\, a - \text{sen}\, B \cot C$

2ª $\cos C \cos b = \cot a \,\text{sen}\, b - \text{sen}\, C \cot A$

3ª $\cos A \cos c = \cot b \,\text{sen}\, c - \text{sen}\, A \cot B$

Queste considerazioni moltiplicano il numero delle formole, e rendono più facile e più adattabile ai diversi casi la maniera di servirsene. Per esercizio facciamone le seguenti applicazioni.

187. L'equazione 1ª del § 182 ordinata rapporto ai due angoli A e C ha dato

$$\text{sen}\, a \cos C = \text{sen}\, b \cos c - \cos b \,\text{sen}\, c \cos A$$

ma ordinata rapporto ai due angoli A e B darà

$$\text{sen}\, a \cos B = \text{sen}\, c \cos b - \cos c \,\text{sen}\, b \cos A$$

188. Si sommino e si sottraggano. La somma darà

$$\text{sen}\, a (\cos B + \cos C) = \text{sen}\, b \cos c + \cos b \,\text{sen}\, c - \cos A (\text{sen}\, b \cos c + \cos b \,\text{sen}\, c)$$

$2\, sen\, a\, cos\, \frac{1}{2}(B+C)\, cos\, \frac{1}{2}(B-C) = sen\,(b+c) -$
$cos\, A\, sen\,(b+c) = sen\,(b+c) - sen\,(b+c) +$
$2\, sen^2\, \frac{1}{2} A\, sen(b+c)$; e dividendo per 2
$sen\, a\, cos\, \frac{1}{2}(B+C) cos\, \frac{1}{2}(B-C) = sen^2\, \frac{1}{2} A\, sen(b+c)$

189 La sottrazione darà
$sen\, a(cos\, C - cos\, B) = sen\,(b-c) + sen(b-c)\, cos\, A$
e collo stesso processo
$sen\, a\, sen\, \frac{1}{2}(B+C) sen\, \frac{1}{2}(B-C) = cos^2\, \frac{1}{2} A\, sen(b-c)$

190. Dividendo la seconda per la prima
$$tan\, \tfrac{1}{2}(B+C)\, tan\, \tfrac{1}{2}(B-C) = cot^2\, \tfrac{1}{2}\, A\, \frac{\text{sen}\,(b-c)}{\text{sen}\,(b+c)}$$
ossia ... $tan^2\, \frac{1}{2}\, A\, tan\, \frac{1}{2}\,(B+C)\, tan\, \frac{1}{2}\,(B-C) =$
$$\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(b-c)\,\cos\,\frac{1}{2}(b-c)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}(b+c)\,\cos\,\frac{1}{2}(b+c)}.$$

191. L' equazione 3ª del § 183, che è ordinata rapporto ai due lati b, a, fu trovata
$sen\, A\, cos\, b = sen.\, C\, cos\, B + cos\, C\, sen\, B\, cos\, a$
Ma ordinata rapporto ai lati b, c, diverrà
$sen\, A\, cos\, c = sen\, C\, cos\, B + cos\, B\, sen\, C\, cos\, a$

191. Sommandole e trasmutandole come al § 188 daranno
$sen\, A(cos\, c + cos\, b) = sen(B+C) + sen(B+C) cos\, a$
$sen\, A\, cos\, \frac{1}{2}(b+c) cos\, \frac{1}{2}(b-c) = sen(B+C)\, cos^2\, \frac{1}{2}\, a$

193. E sottraendole, con fare le operazioni analoghe, si ottiene
$sen\, A(cos\, c - cos\, b) = sen(B-C) - sen(B-C)\, cos\, a$
$sen\, A\, sen\, \frac{1}{2}(b-c)\, sen\, \frac{1}{2}(b+c) = sen(B-C)\, sen^2\, \frac{1}{2}\, a$

194. Dividendo le seconde § 193 per 192.

$$tan\tfrac{1}{2}(b+c)\,tan\tfrac{1}{2}(b-c)=\frac{\tan^2\tfrac{1}{2}a\ \text{sen}\,(B-C)}{\text{sen}\,(B+C)}$$

$$cot^2\tfrac{1}{2}a\ tan\tfrac{1}{2}(b+c)\,tan\tfrac{1}{2}(b-c)=\frac{\text{sen}\,(B-C)}{\text{sen}\,(B+C)}=$$

$$\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(B-C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C)}.$$

195. Moltiplicando questa formola per quella del § 190 se ne trova una che mostra simultaneamente il rapporto delli sei elementi del triangolo. Difatti

$$\frac{\tan^2\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}(B+C)\tan\tfrac{1}{2}(B-C)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(B-C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C)}$$

$$=\frac{\cot^2\tfrac{1}{2}a\tan\tfrac{1}{2}(b+c)\tan\tfrac{1}{2}(b-c)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b+c)}$$

sciolte le *tan* in $\frac{\text{sen}}{\cos}$, e fatte le riduzioni risulta

$$\frac{\text{sen}^2\tfrac{1}{2}(b-c)\cot^2\tfrac{1}{2}a}{\cos^2\tfrac{1}{2}(b+c)}=\frac{\text{sen}^2\tfrac{1}{2}(B-C)\tan^2\tfrac{1}{2}A}{\cos^2\tfrac{1}{2}(B+C)}$$

ed estratte le radici

$$\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(b-c)\cot\tfrac{1}{2}a}{\cos\tfrac{1}{2}(b+c)}=\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(B-C)\tan\tfrac{1}{2}A}{\cos\tfrac{1}{2}(B+C)}$$

equazione feconda di utili applicazioni.

196. Si ha ... *sen b* : *sen c* :: *sen B* : *sen C*

$$\frac{\text{sen}\,b+\text{sen}\,c}{\text{sen}\,b-\text{sen}\,c}=\frac{\text{sen}\,B+\text{sen}\,C}{\text{sen}\,B-\text{sen}\,C}=$$

$$\frac{\tan\tfrac{1}{2}(b+c)}{\tan\tfrac{1}{2}(b-c)}=\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}(b+c)}=$$

$$\frac{\tan\tfrac{1}{2}(B+C)}{\tan\tfrac{1}{2}(B-C)}=\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(B-C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C)}.$$

Dal § 190 si deduce

$$tan\,\tfrac{1}{2}(B+C)\,tan\,\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(B-C)}{\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}$$

$$=\frac{\cot^2\tfrac{1}{2}A\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b+c)}$$

Moltiplicando quest'equazione per la prima

$$\frac{\text{sen}^2\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(B-C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}{\cos^2\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(B-C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}=$$

$$\frac{\cot^2\tfrac{1}{2}A\cos^2\tfrac{1}{2}(b-c)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(b+c)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(b-c)}{\cos^2\tfrac{1}{2}(b+c)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(b+c)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(b-c)}$$

e perciò $tan^2\,\tfrac{1}{2}(B+C)=\dfrac{\cot^2\tfrac{1}{2}A\cos^2\tfrac{1}{2}(b-c)}{\cos^2\tfrac{1}{2}(b+c)}$, da cui estratta la radice si ha la prima formola di Nepero

$$tan\,\tfrac{1}{2}(B+C)=\frac{\cot\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}(b+c)}.$$

197. Se per questa si divida l'equazione del § 190, fatte le riduzioni, si ha la seconda formola di Nepero.

$$tan\,\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{\cot\tfrac{1}{2}A\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(b+c)}.$$

198. La stessa prima equazione del § 196 moltiplicata per l'altra del § 194 darà

$$cot^2\,\tfrac{1}{2}a\,tan^2\,\tfrac{1}{2}(b+c)=\frac{\cos^2\tfrac{1}{2}(B-C)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(B-C)}{\cos^2\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(B-C)}$$

fatte le riduzioni ed estratte le radici si ha la terza analogia di Nepero

$$tan\,\tfrac{1}{2}(b+c)=\frac{\tan\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B-C)}{\cos\tfrac{1}{2}(B+C)}.$$

199. Si divida l'equazione del § 194 per questa, onde ottenere la quarta di Nepero

$$tan\ \tfrac{1}{2}(b-c)=\frac{tan\ \tfrac{1}{2}a\ sen\ \tfrac{1}{2}(B-C)}{sen\ \tfrac{1}{2}(B+C)}.$$

Le formole di Nepero rendono per la loro brevità ed eleganza dei grandi servigj agli astronomi calcolatori. Vi sono molte altre strade, anche più brevi, per dimostrarle.

200. La formola del § 137 si scriva così

$$sen^2\tfrac{1}{2}a=sen^2\tfrac{1}{2}(b+c)sen^2\tfrac{1}{2}A\left(1+\frac{sen^2\tfrac{1}{2}(b-c)cos^2\tfrac{1}{2}A}{sen^2\tfrac{1}{2}(b+c)sen^2\tfrac{1}{2}A}\right)$$

vi si sostituisca il valore di $tan^2\ \tfrac{1}{2}(B-C)$ preso dal § 197 si avrà

$$sen^2\ \tfrac{1}{2}a=sen^2\ \tfrac{1}{2}(b+c)\ sen^2\ \tfrac{1}{2}A\left(1+tan^2\ \tfrac{1}{2}(B-C)\right)$$

Ma Gon. 30. ... $1+tan^2=\frac{1}{cos^2}$ perciò

$$sen^2\ \tfrac{1}{2}a=\frac{sen^2\ \tfrac{1}{2}(b+c)\ sen^2\ \tfrac{1}{2}A}{cos^2\ \tfrac{1}{2}(B-C)}$$ ed estratta la radice

$$sen\ \tfrac{1}{2}a=\frac{sen\ \tfrac{1}{2}A\ sen\ \tfrac{1}{2}(b+c)}{cos\ \tfrac{1}{2}(B-C)}$$ ..... prima formola di Gauss.

201. Scrivendola però nel modo seguente

$$sen^2\tfrac{1}{2}a=sen^2\tfrac{1}{2}(b-c)cos^2\tfrac{1}{2}A\left(1+\frac{sen^2\tfrac{1}{2}(b+c)sen^2\tfrac{1}{2}A}{sen^2\tfrac{1}{2}(b-c)cos^2\tfrac{1}{2}A}\right)$$

sostituendo $cot^2\ \tfrac{1}{2}(B-C)$, dedotto dal § 197 .....

$$sen^2\ \tfrac{1}{2}a=sen^2\ \tfrac{1}{2}(b-c)\ cos^2\ \tfrac{1}{2}A\left(1+cot^2\ \tfrac{1}{2}(B-C)\right)$$

$$= \frac{\text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(b-c)\cos^2 \tfrac{1}{2} A}{\text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(B-C)}, \text{ onde}$$

$$sen\ \tfrac{1}{2}\, a = \frac{\cos \tfrac{1}{2} A \text{ sen } \tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{sen } \tfrac{1}{2}(B-C)}; \text{ terza formola di Gauss.}$$

202. La formola del § 138 si può mettere sotto quest'altro aspetto

$$cos^2 \tfrac{1}{2} a = cos^2 \tfrac{1}{2}(b+c) sen^2 \tfrac{1}{2} A \left(1 + \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2}(b-c)\cos^2 \tfrac{1}{2} A}{\cos^2 \tfrac{1}{2}(b+c)\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A}\right)$$

ma per il § 196; $\frac{\cot \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(b-c)}{\cos \tfrac{1}{2}(b+c)} = tan\ \tfrac{1}{2}(B+C)$

sostituendo si avrà

$$cos^2 \tfrac{1}{2} a = cos^2 \tfrac{1}{2}(b+c)\, sen^2 \tfrac{1}{2} A \left(1 + tan^2 \tfrac{1}{2}(B+C)\right)$$

ma $1 + tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, si avrà, dopo estratta la radice,

$$cos\ \tfrac{1}{2}\, a = \frac{\text{sen } \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(b+c)}{\cos \tfrac{1}{2}(B+C)} \text{ seconda formola di Gauss.}$$

203. La stessa formola si metta come siegue

$$cos^2 \tfrac{1}{2} a = cos^2 \tfrac{1}{2}(b-c) cos^2 \tfrac{1}{2} A \left(1 + \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2}(b+c)\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A}{\cos^2 \tfrac{1}{2}(b-c)\cos^2 \tfrac{1}{2} A}\right)$$

ma per il § 196 $\frac{\tan \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(b+c)}{\cos \tfrac{1}{2}(b-c)} = cot\ \tfrac{1}{2}(B+C)$

sarà perciò

$$cos^2 \tfrac{1}{2} a = cos^2 \tfrac{1}{2}(b-c) cos^2 \tfrac{1}{2} A \left(1 + cot^2 \tfrac{1}{2}(B+C)\right)$$

e *Gon.* 26, estraendo la radice

$$cos\ \tfrac{1}{2}\, a = \frac{\cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{sen } \tfrac{1}{2}(B+C)}, \text{ quarta formola di Gauss.}$$

Queste quattro belle formole di Gauss in molte occasioni si sostituiscono con vantaggio alle quattro di Nepero.

204. Seguendo i precetti del § 184 e seguenti si potranno variare agli altri elementi del triangolo tutte queste formule. Per esempio la precedente si può cambiare nei seguenti modi

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B+C)}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}b = \frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+C)}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$$

nelle quali sempre il *coseno* della metà di un lato diviso per il *coseno* della metà dell'angolo opposto è uguale al *coseno* della semidifferenza degli altri due lati diviso pel *seno* della semisomma degli angoli a questi opposti. Bisogna farsi un' abitudine di riguardare tutte le formole non nella semplice maniera con cui si scrivono, ma sotto la forma generale dei rapporti che le costituiscono.

Del triangolo sferico isoscele.

205. Per ottenere le formole adattate alla risoluzione dei triangoli sferici isosceli non si ha che supporre $b=c$, e $B=C$, nelle formole generali. Ma si arriva più presto abbassando dall' angolo verticale A (*fig.* 21) una perpendicolare sulla base a, la quale dividerà il triangolo in due triangoli rettangoli uguali, con un lato comune; e ciascuno de' quali, adattandovi le soluzioni dei triangoli sferici rettangoli, risolverà il triangolo.

Si chiami *a* la *base BC* del triangolo isoscele *ABC* (*fig.* 21), sia *A l'angolo verticale.* Si chiamino, *B l'angolo sulla base*, il quale è sempre uguale a *C*: come pure *c il lato* il cui uguale è *b*: e *p* la perpendicolare *AD*. Si troveranno facilmente le seguenti semplici analogie.

$$sen\,\tfrac{1}{2}a = sen\,\tfrac{1}{2}A\,sen\,c = sen\,B\,sen\,c = cot\,B\,tan\,p$$

$$cos\,\tfrac{1}{2}a = \frac{cos\,\tfrac{1}{2}A}{sen\,B} = \frac{cos\,c}{cos\,p}$$

$$tan\,\tfrac{1}{2}a = cos\,\tfrac{1}{2}A\,tan\,c = cos\,B\,tan\,c = tan\,\tfrac{1}{2}A\,sen\,p$$

$$sen\;c = \frac{sen\,\tfrac{1}{2}a}{sen\,\tfrac{1}{2}A} = \frac{sen\,\tfrac{1}{2}a}{sen\,B} = \frac{sen\,p}{sen\,\tfrac{1}{2}A} = \frac{sen\,p}{sen\,B}$$

$$cos\;c = cot\,\tfrac{1}{2}A\,cot\,B = cos\,\tfrac{1}{2}a\,cos\,p$$

$$tan\;c = \frac{tan\,\tfrac{1}{2}a}{cos\,\tfrac{1}{2}A} = \frac{tan\,\tfrac{1}{2}a}{cos\,B} = \frac{tan\,p}{cos\,\tfrac{1}{2}A}$$

$$sen\;p = cot\,\tfrac{1}{2}A\,tan\,\tfrac{1}{2}a = sen\,\tfrac{1}{2}A\,sen\,c = sen\,B\,sen\,c$$

$$cos\;p = \frac{cos\,B}{sen\,\tfrac{1}{2}A} = \frac{cos\,c}{cos\,\tfrac{1}{2}a}$$

$$tan\;p = sen\,\tfrac{1}{2}a\,tan\,B = cos\,\tfrac{1}{2}A\,tan\,c$$

$$sen\,\tfrac{1}{2}A = \frac{sen\,\tfrac{1}{2}a}{sen\,c} = \frac{cos\,B}{cos\,p} = \frac{sen\,p}{sen\,c}$$

$$cos\,\tfrac{1}{2}A = cos\,\tfrac{1}{2}a\,sen\,B = tan\,\tfrac{1}{2}a\,cot\,c = cot\,c\,tan\,p$$

$$tan\,\tfrac{1}{2}A = \frac{cot\,B}{cos\,c} = \frac{tan\,\tfrac{1}{2}a}{sen\,p}$$

$$sen\;B = \frac{cos\,\tfrac{1}{2}A}{cos\,\tfrac{1}{2}a} = \frac{sen\,\tfrac{1}{2}a}{sen\,c} = \frac{sen\,p}{sen\,c}$$

$$cos\;B = tan\,\tfrac{1}{2}a\,cot\,c = sen\,\tfrac{1}{2}A\,cos\,p$$

$$tan\;B = \frac{cot\,\tfrac{1}{2}A}{cos\,c} = \frac{tan\,p}{sen\,\tfrac{1}{2}a}$$

se a queste formole si adattino li precetti del § 94 e seg. molte altre se ne otterranno che potranno all'uopo adoperarsi.

Ricerche relative alla somma dei lati o degli angoli.

206. Dati *tre lati* di un triangolo sferico trovare la *somma dei suoi angoli.*

Si chiami s la semisomma dei lati, S la semisomma degli angoli, o sia si facci

$$s=\frac{a+b+c}{2},\ S=\frac{A+B+C}{2}$$

$$\cos S=\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\cos\left(\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}C\right)$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C-\cos\tfrac{1}{2}A\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}B\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C$$

Per il § 116 $\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}(s-b)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}\right)}$, ne siegue che l' espressione degli altri due angoli sarà

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}(s-c)\operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen}c\operatorname{sen}a}\right)},\ \text{e}$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}\right)}$$

E per il § 117 si hanno ancora

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}\right)},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}\right)}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}\right)}$$

Introdotti questi valori nell' equazione primitiva, e moltiplicati, danno

$$cos\ S = \left(\frac{\text{sen}^3\, s\ \text{sen}\,(s-a)\ \text{sen}\,(s-b)\ \text{sen}\,(s-c)}{\text{sen}^2\, a\ \text{sen}^2\, b\ \text{sen}^2\, c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\left(\frac{\text{sen}\, s\ \text{sen}^3\,(s-a)\ \text{sen}\,(s-b)\ \text{sen}\,(s-c)}{\text{sen}^2\, a\ \text{sen}^2\, b\ \text{sen}^2\, c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\left(\frac{\text{sen}\, s\ \text{sen}\,(s-a)\ \text{sen}^3\,(s-b)\ \text{sen}\,(s-c)}{\text{sen}^2\, a\ \text{sen}^2\, b\ \text{sen}^2\, c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\left(\frac{\text{sen}\, s\ \text{sen}\,(s-a)\ \text{sen}\,(s-b)\ \text{sen}^3\,(s-c)}{\text{sen}^2\, a\ \text{sen}^2\, b\ \text{sen}^2\, c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\text{sen}\, s\ \text{sen}\,(s-a)\ \text{sen}\,(s-b)\ \text{sen}\,(s-c)}}{\text{sen}\, a\ \text{sen}\, b\ \text{sen}\, c}\right) \text{ moltiplicato}$$

per $\left(\text{sen}\, s - \text{sen}\,(s-a) - \text{sen}\,(s-b) - \text{sen}\,(s-c)\right)$

Ma nel secondo fattore (*Gon.* 122)

$$sen\ s - sen\ (s-a) = 2\,sen\ \tfrac{1}{2}\ a\ cos\ (s - \tfrac{1}{2}\,a) =$$

$$2\,sen\,\tfrac{1}{2}\,a\ cos\left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{a}{2}\right) = 2\,sen\,\tfrac{1}{2}\,a\ cos\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

e .... $sen\ (s-b) + sen\ (s-c) =$

$$2\ sen\left(s - \tfrac{1}{2}\,(b+c)\right)\ cos\ \tfrac{1}{2}\,(b \backsim c) =$$

$$2\ sen\left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{b+c}{2}\right) cos\ \tfrac{1}{2}\,(b \backsim c) =$$

$2\ sen\ \tfrac{1}{2}\ a\ cos\ \tfrac{1}{2}\,(b \backsim c)$. Si avrà dunque

$$cos\ S = \frac{\sqrt{\text{sen}\, s\ \text{sen}\,(s-a)\ \text{sen}\,(s-b)\ \text{sen}\,(s-c)}}{\text{sen}\, a\ \text{sen}\, b\ \text{sen}\, c} \times$$

$$-\,2\ sen\ \tfrac{1}{2}\ a\left(cos\ \tfrac{1}{2}\,(b \backsim c) - cos\ \tfrac{1}{2}\,(b+c)\right)$$

e *Gon.* 90 ... $\cos S = \frac{-4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$ moltiplicato per $\sqrt{\operatorname{sen} s \operatorname{sen} (s-a) \operatorname{sen} (s-b) \operatorname{sen} (s-c)}$
quivi sciolti *sen a*, *sen b*, *sen c* in $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}$, e fatte le riduzioni si otterrà

$$\cos S = \cos \tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{-\sqrt{\operatorname{sen} s \operatorname{sen} (s-a) \operatorname{sen} (s-b) \operatorname{sen} (s-c)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}.$$

207. Dati li *tre angoli* si cerca la *periferia* del triangolo, cioè la *somma dei lati.*

Si trasporti nel triangolo polare la formola precedente, e si avrà § 53

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B+C) = \cos \tfrac{1}{2}\big(180 - (a+b+c)\big) =$$

$$\cos\left(90 - \frac{a+b+c}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \operatorname{sen} s,$$

e così pure

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a+b+c) = \operatorname{sen} s = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\left(\frac{180-A-B-C}{2}\right) =$$

$$\operatorname{sen}\left(90 - \frac{(A+B+C)}{2}\right) = \cos \tfrac{1}{2}(A+B+C) = \cos S,$$

lo stesso si facci degli altri fattori, e però .....

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} s = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}$$

208. Dati li *tre lati* trovare la *perpendicolare* su di uno di essi.

Si chiami p la perpendicolare abbassata dall'angolo A sul lato a; p', p'' le altre su b, e su c.

Dalli § 116 e 117 si ebbe per l'angolo adjacente al lato su cui cade la perpendicolare $sen \frac{1}{2} B =$

$$\sqrt{\left(\frac{(s-a)(s-c)}{\text{sen } a \text{ sen } c}\right)}, \text{ e } cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\left(\frac{\text{sen } s \text{ sen } (s-b)}{\text{sen } a \text{ sen } c}\right)}$$

onde $2 \; sen \frac{1}{2} B \; cos \frac{1}{2} B = sen \; B =$

$$2 \sqrt{\left(\frac{\text{sen } s \text{ sen } (s-a) \text{ sen } (s-b) \text{ sen } (s-c)}{\text{sen}^2 a \text{ sen}^2 c}\right)}$$

ma $sen \; p = sen \; c \; sen \; B$, quì sostituito il valore trovato di $senB$, e ridotta l'equazione, si troverà

$$sen \; p = \frac{2 \sqrt{\text{sen } s \text{ sen } (s-a) \text{ sen } (s-b) \text{ sen } (s-c)}}{\text{sen } a}$$

il numeratore è costante per tutte le tre perpendicolari del triangolo; il denominatore è sempre il seno del lato su cui cade la perpendicolare.

209. Dati ora li *tre angoli* trovare la *perpendicolare* abbassata da uno di essi.

Per mezzo del triangolo polare la formola precedente risolverà il problema. Si può risolvere direttamente moltiplicando l'una per l'altra le formule de' § 122 e 123, onde avere $sen \; c$, il cui valore introdotto nella formola $sen \; p = sen \; B \; sen \; c$, darà

$$sen \; p = \frac{2 \sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}{\text{sen } A}$$

nella quale il numeratore è costante per le tre perpendicolari, e il denominatore è sempre il *seno* dell'angolo da cui la perpendicolare è stata abbassata.

Questi due ultimi paragrafi potevano meglio trovar luogo, il 208 dopo il 120, e il 209 dopo il 126.

Superficie del triangolo sferico.

210. Stabiliremo prima il seguente teorema. Se nel fuso $AMBN$ (fig. 22) sono A ed E i poli dell'arco MN, o sia se quest'arco è comune misura degli angoli A ed E, è chiaro che la superficie del fuso sta alla superficie della sfera come l'arco $MN = A = E$ sta all'intiera circonferenza del cerchio massimo. Chiamato r il raggio della sfera, e $\pi = 3,1416 +$ (Gon 290) sarà per la Geometria la superficie della sfera $= K = 4\pi r^2$; onde la superficie del fuso $AMENA$, il cui angolo A è determinato e conosciuto, sarà $\varphi = \frac{4A\pi r^2}{360^\circ} = \frac{A\pi r^2}{90}$. Se sia A 180° sarà evidentemente $\varphi = 2\pi r^2 = \frac{1}{2} K$; e se $A = 90^\circ$ sarà $\varphi = \pi r^2 = \frac{1}{4} K$.

211. Sia (fig. 23) il triangolo ABC formato dai cerchi massimi sulla superficie di una sfera; e se ne voglia misurare la superficie.

Se ne prolunghi il lato BC in modo che compisca il circolo massimo, del quale è parte; onde $BCFEB$ rappresenta la metà della sfera. Si prolunghino pure gli altri due lati BA, CA sino alla loro riunione in D nell'altro emisfero. È chiaro che essendo tutti di 180° gli archi $CB+BE$, $CA+AE$, $BC+CF$, $BA+AF$, $AC+CD$, $AB+BD$ si formeranno dalla loro unione sulla superficie della sfera li tre fusi $ACDBA=\varphi$, $BCFAB=\varphi'$, $CBEAC = \varphi''$, la cui grandezza è determinata dai tre angoli del triangolo ABC, ed in ciascuno dei quali è compresa la superficie del triangolo medesimo. È chiaro ancora che la porzione BDC del fuso determinato dell'angolo A è uguale al triangolo AEF porzione del fuso opposto formato dai cerchj stessi, essendo

supplementi a 180 del lato AB tanto AF quanto DB, e del lato AC tanto AE quanto DC.

E facendo la superficie del triangolo $ABC = x$, e q quella del resto del fuso $\varphi = ABC + AEF$; quella del resto del fuso $\varphi' = m$, e l'altra del resto del fuso $\varphi'' = n$ si avrà

Superficie del fuso dell'angolo $\left\{\begin{array}{l} A = BAC + EAF = x + q = \varphi \\ B = ABC + CFA = x + m = \varphi' \\ C = ACB + BEA = x + n = \varphi'' \end{array}\right.$

Onde si ha $\varphi + \varphi' + \varphi'' = 3x + q + m + n$. Ma l'intiero emisfero $\frac{1}{2}K = x + q + m + n$ somma dei quattro triangoli. Sarà quindi $\varphi + \varphi' + \varphi'' - \frac{1}{2}K = 2x$; e perciò la superficie del triangolo $ABC = x$

$$= \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi' + \varphi'') - \tfrac{1}{4}K.$$

Esprimendo ora la superficie di ciascun fuso nell'angolo proprio che lo determina, § 210, si avrà

$$x = \frac{\pi r^2}{180}(A + B + C) - \pi r^2 = \frac{\pi r^2}{180}(A + B + C - 180^\circ)$$

$$= \frac{r^2}{r^\circ}(A + B + C - 180^\circ), \text{ perchè } (Gon.\ 291)$$

$$1 : r^\circ :: 2\pi : 360^\circ, \text{ onde } \frac{\pi}{180} = \frac{1}{r^\circ} = sen\ 1^\circ$$

212. Onde 1° la superficie del triangolo sferico si ottiene *sottraendo* 180° *dalla somma dei tre angoli, e moltiplicando il residuo per il quadrato del raggio della sfera espresso in parti angolari*. Bisognerà però rendere omogenea l'espressione degli angoli e del raggio. Sia $(A + B + C - 180) = H$. Se la superficie si vuole in gradi in minuti o in secondi si ridurrà H in gradi minuti o secondi, e s'impiegherà r°, r', r''. Ma se la superficie si desidera

in piedi in pollici etc. vi si ridurrà H colla proporzione r^o, r', r'' sta ad H^o, H', H'' come r in piedi o pollici ad H in piedi o pollici. 2° Le superficie di due triangoli sulla stessa sfera stanno in ragione degli eccessi della somma de' loro tre angoli sopra 180°. Se si fa $r = 1$ si avrà x espresso in parti dell'unità; se x si esprime in miglia, in tese, in piedi, si otterrà x espresso in miglia in tese in piedi quadrati.

Degli archi di parallelo nei triangoli.

213. Frequente è il caso in Astronomia di un triangolo sferico, un lato del quale sia arco di parallelo, e perciò arco di cerchio minore. Bisognerà prima di risolvere il triangolo ridurlo ad arco di cerchio massimo.

Sia il triangolo ABC, fig. 25, in cui il lato BdC sia un arco di parallelo. Considerato nel suo *fuso* conterrà esso lo stesso numero di gradi g dell' arco omologo di cerchio massimo EQ a cui è parallelo, e che misura l'angolo P al polo comune.

Onde l'arco di cerchio massimo BC compreso tra li punti B, C; lo stesso che è sotteso dalla medesima corda dell'arco di parallelo, contiene, § 34, un minor numero di gradi. E questo per l'appunto è quello che bisognerà nel triangolo ABC sostituire al lato BdC.

Abbassata dal polo P una perpendicolare Pq sull'arco del parallelo, il triangolo isoscele BPC resta diviso in due triangoli rettangoli § 49, e si ha

$$1 : sen\, PB :: sen\, \tfrac{1}{2} P : sen\, \tfrac{1}{2} BC = sen\, \tfrac{1}{2} P\, sen\, PB$$

Ma l'angolo al polo contiene lo stesso numero di

gradi g dell'arco del parallelo, e PB è la distanza Δ del parallelo medesimo dal suo polo; chiamando a il lato del triangolo BC che si cerca espresso in parti del cerchio massimo, sarà $sen\,\tfrac{1}{2}\,BC = sen\,\tfrac{1}{2}\,g\ sen\Delta = sen\,\tfrac{1}{2}\,a$, che darà l'arco a di cerchio massimo sotteso dalla corda stessa dell'arco di parallelo che è lato del triangolo, e che vi si deve sostituire.

214. Si sa dalla geometria che la lunghezza effettiva di due archi di cerchio omologhi, o di egual numero di gradi è proporzionale ai loro raggi. Cioè, fig. 7. sta $BH : EF :: BC : ES :: sen\,90^{o} : sen\,AE$; ancora sta $BH : PQ :: BC : PT :: sen\,90 : sen\,PD$ ($= sen\,AP$).

Onde le grandezze effettive di due archi paralleli dello stesso numero di gradi sono come li seni delle loro distanze dal polo comune.

215. Onde l'arco BC del parallelo trasportato sopra l'arco del cerchio massimo EQ di egual numero di gradi conterrà un numero di gradi $g\ sen\ \Delta$. All'incontro l'arco EQ del cerchio massimo trasportato sul parallelo vi occuperà un numero di gradi $\frac{g}{sen\,\Delta}$. Queste espressioni fanno conoscere le lunghezze effettive degli archi omologhi paralleli, l'uno rispetto all'altro.

Delle analogie differenziali de' triangoli sferici.

216. Essendo tutto in movimento nel Cielo, il triangolo sferico formato per un' istante non sarà lo stesso nell'istante appresso. Le declinazioni degli astri, e quindi le loro distanze polari, le loro distanze dal zenit, gli angoli orarj, gli azimuti, cambiano in ogni momento. Ma non perciò vengono a cambiare in nul-

la le verità eterne, che le formole trigonometriche rinchiudono. Le formole restano le stesse qualunque sia lo stato che assumono le quantità che esse mettono in relazione.

Così nel triangolo formato al Polo, al Zenit, e all'Astro, comunque cambj per l'alzarsi dell'astro l'angolo orario, sempre sarà vera la formola che darà la distanza dal Zenit ... *cos Dist zenitale* =
cos *Ang. Orar.* × sen *Collatitudine* × seno *Codeclinazione* + cos *collatitudine* × cos *codeclinazione*.

Onde calcolando la formola nei due stati dell'Angolo orario si otterranno le due distanze dal Zenit, la di cui differenza corrisponderà al cambiamento dell'angolo orario. Ma questo doppio calcolo riesce lungo, e in molte circostanze difficile; principalmente quando si dovrà sostituire il valore della variazione in altre formole; onde si rende necessario poter conoscere il rapporto delle due variazioni dell'angolo orario e della distanza dal Zenit. A tale oggetto si adattano alle variazioni dei triangoli le note regole del calcolo differenziale.

217. Siano li due archi A, B; l'arco $A>B$; e alla maniera del calcolo differenziale si chiami ΔB, quello di cui deve crescere B per essere uguale ad A: onde si abbia $A = B + \Delta B$. Similmente si chiami Δ *sen* B quello che manca al *sen* B per essere uguale a *sen* A, onde si abbia $sen\, A - sen\, B = \Delta sen B$.

Nello stesso modo Δcos, Δtan, Δcot, Δsec, $\Delta cosec$ indicheranno le differenze tra le rispettive funzioni degli archi A e B. Son note le seguenti equazioni, Gon. 121 181 etc.,

$$sen\, A - sen\, B = 2\, sen\, \tfrac{1}{2}(A-B)\, cos\, \tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$cos\, A - cos\, B = -2\, sen\, \tfrac{1}{2}(A-B)\, sen\, \tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$tan\ A - tan\ B = \frac{\text{sen}\ (A-B)}{\cos A \cos B}$$

$$cot\ A - cot\ B = \frac{-\text{sen}\ (A-B)}{\text{sen}\ A\ \text{sen}\ B}$$

$$sec\ A - sec\ B = \frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\cos B} = \frac{\cos B - \cos A}{\cos A \cos B}$$

$$= \frac{2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}(A-B)\ \text{sen}\ \frac{1}{2}(A+B)}{\cos A \cos B}$$

$$cosec A - cosec B = \frac{1}{\text{sen}\ A} - \frac{1}{\text{sen}\ B} = \frac{\text{sen}\ B - \text{sen}\ A}{\text{sen}\ A\ \text{sen}\ B}$$

$$= \frac{-2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen}\ A\ \text{sen}\ B}$$

Sostituendo la maniera adottata per esprimere le differenze, le sei precedenti equazioni si trasmuteranno nelle seguenti.

218. $\Delta\ sen\ B = 2\ sen\ \frac{1}{2}\Delta B\ cos\ (B + \frac{1}{2}\Delta B)$

219. $-\Delta\ cos\ B = 2\ sen\ \frac{1}{2}\Delta B\ sen\ (B + \frac{1}{2}\Delta B)$

220. $\Delta\ tan\ B = \frac{\text{sen}\ \Delta B}{\cos B \cos (B + \Delta B)}$

221. $-\Delta\ cot\ B = \frac{\text{sen}\ \Delta B}{\text{sen}\ B\ \text{sen}\ (B + \Delta B)}$

222. $\Delta\ sec\ B = \frac{2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\Delta B\ \text{sen}\ (B + \frac{1}{2}\Delta B)}{\cos B \cos (B + \Delta B)}$

223. $-\Delta\ cosec B = \frac{2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\Delta B\cos (B + \frac{1}{2}\Delta B)}{\text{sen}\ B\ \text{sen}\ (B + \Delta B)}$

Queste espressioni sono rigorose, perchè nulla si è trascurato nel formarle. Si chiamano *differenziali finite* o *differenze*, e si sogliono indicare col simbolo Δ. Sono esse applicabili alle variazioni di qualunque grandezza.

224. Se la differenza ΔB fosse talmente piccola, che essa possa venir considerata come un arco infinitesimo; quest' archetto si confonderà col suo seno, e il suo coseno si potrà considerare uguale al raggio. *Gon.* 307 309 e *Trig.* 111. Adottando in questo caso il simbolo ϑ per denotare una differenziale infinitesima, si farà $sen\ \Delta B = \vartheta B$, $cos\ \Delta B = 1$: e si metterà B in vece di $B + \Delta B$.

In tale supposizione sviluppato il secondo membro del valore di $\Delta\ sen\ B$ si ha $\Delta\ sen\ B =$

$$2sen\,\tfrac{1}{2}\Delta B\ cos\ B\ cos\,\tfrac{1}{2}\Delta B - 2sen\,\tfrac{1}{2}\Delta B\ sen\ B\ sen\,\tfrac{1}{2}\Delta B$$
$$= sen\ \Delta B\ cos\ B - 2sen^2\,\tfrac{1}{2}\Delta B\ sen\ B$$
$$= sen\ \Delta B\ cos\ B - sen\ B\,(1 - cos\ \Delta B)$$

ma $sen\ \Delta B = \vartheta B$, e $cos\ \Delta B = 1$, resta, adottando il simbolo delle differenziali,

225. $\vartheta\ sen\ B = \dfrac{\vartheta B\ \cos\ B}{r''}$, dove r'' è introdotto per ridurre omogeneo al *seno* l'archetto ϑB.

Nella stessa guisa sviluppando li secondi membri dell'altre equazioni si avrà

226. $-\vartheta\ cos\ B = \dfrac{\vartheta B\ \text{sen}\ B}{r''}$

227. $\vartheta\ tan\ B = \dfrac{\vartheta B}{\cos^2 B\ r''}$

228. $-\vartheta\ cot\ B = \dfrac{\vartheta B}{\text{sen}^2 B\ r''}$

229. $\vartheta\ sec\ B = \dfrac{\vartheta B\ \tan\ B}{\cos\ B\ r''}$

230. $-\vartheta cosec B = \dfrac{\vartheta B\ \cot\ B}{\text{sen}\ B\ r''}$

Queste sono le *differenziali*, o *differenziali infinitesime* delle funzioni dell'arco B, quando esse sono piccolissime, o tali che se ne possono nelle formole trascurare impunemente le quantità di secondo ordine. Sviluppando le formole primitive, e comparandole colle seconde si conoscerà subito, che solo si sono trascurati gl'infinitesimi di second'ordine per formare quest'altre; e quindi si vedrà sino a quale grandezza di δB si può far uso delle seconde senza bisogno di ricorrere alle prime.

231. Facile riesce ora trovare le differenze e le differenziali delle seconde potenze delle funzioni dell'arco B.

$$\text{sen}^2 A - \text{sen}^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A = \text{sen}(A-B)\,\text{sen}(A+B)$$

e quivi sostituendo le espressioni adottate

$$\Delta\,\text{sen}^2 B = -\Delta \cos^2 B = \text{sen}\,\Delta B\,\text{sen}(2B+\Delta B)$$

232. $$\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\text{sen}(A-B)\,\text{sen}(A+B)}{\cos^2 A \cos^2 B} =$$

$$\Delta \tan^2 B = \frac{\text{sen}\,\Delta B\,\text{sen}(2B+\Delta B)}{\cos^2 B \cos^2(B+\Delta B)}$$

233. $$-(\cot^2 A - \cot^2 B) = \frac{\text{sen}(A-B)\,\text{sen}(A+B)}{\text{sen}^2 A\,\text{sen}^2 B} =.$$

$$-\Delta \cot^2 B = \frac{\text{sen}\,\Delta B\,\text{sen}(2B+\Delta B)}{\text{sen}^2 B\,\text{sen}^2(B+\Delta B)}$$

234. $$\sec^2 A - \sec^2 B = \Delta \sec^2 B = \Delta \tan^2 B$$

235. $$\text{cosec}^2 A - \text{cosec}^2 B = -\Delta\,\text{cosec}^2 B = -\Delta \cot^2 B$$

236. E passando dalle differenze alle differenziali colle stesse regole delle lineari

$$\Delta\,\text{sen}^2 B = \text{sen}\,\Delta B\,\text{sen}\,2\left(B + \tfrac{1}{2}\Delta B\right) =$$

$$2\,\text{sen}\,\Delta B\,\text{sen}\left(B + \tfrac{1}{2}\Delta B\right)\cos\left(B + \tfrac{1}{2}\Delta B\right)$$

e perciò

$$\delta\, sen^2 B = \frac{2\delta B \text{ sen } B \cos B}{r''} = -\delta \cos^2 B$$

237. $\delta\, tan^2 B = \delta\, sec^2 B = 2 tan\, B\, \delta\, tan\, B =$

$$\frac{2\delta B \tan B}{\cos^2 B\, r''} = \frac{2\delta B \tan B \sec^2 B}{r''}$$

238. $-\delta\, cot^2 B = -\delta\, cosec^2 B = 2 cot\, B\, \delta\, cot\, B =$

$$\frac{2\delta B \cot B}{\text{sen}^2 B\, r''} = \frac{2\delta B \cot B \text{ cosec}^2 B}{r''}$$

239. Non resta che adattare quest'espressioni alle parti variabili di un triangolo, onde conoscerne le variazioni.

Se nel triangolo sferico ABC (fig. 24) restando costanti il lato AB ($= c$), e l'angolo adjacente A, cresca il lato AC ($= b$) e divenga $AD = b + CD = b + \Delta b$, è chiaro che per necessità cambieranno simultaneamente le altre parti del triangolo, e si convertiranno, il lato $BC = a$ in $BD = a + (BD - BC) = a + \Delta a$; l'angolo B in $ABD = B + CBD = B + \Delta B$ e l'angolo C in $BDA = C - (BCA - BDC) = C - \Delta C$. Dove si farà attenzione, che mentre in questo caso tutti gli elementi del triangolo crescono, il solo angolo C diminuisce, e che perciò mentre tutte le variazioni sono positive, la sola variazione dell'angolo C è in senso opposto alle altre, cioè negativa. Quest'avvertenza alla direzione *positiva* o *negativa* di ciascuna variazione è sommamente necessaria onde non commettere de' gravissimi errori.

240. Il triangoletto BDC rappresenta la *differenza* dei due triangoli ABC ed ABD, e in esso si ha

$sen\, D : sen\, BC :: sen\, C : sen\, BD :: sen\, CBD : sen\, CD$

ovvero

$$sen\,(C-\Delta C) : sen\,a :: sen\,C : sen\,(a+\Delta a) :: sen\,\Delta B : sen\,\Delta b;$$ onde

$$\frac{\text{sen}\,\Delta B}{\text{sen}\,\Delta b} = \frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,(a+\Delta a)} = \frac{\text{sen}\,(C-\Delta C)}{\text{sen}\,a}$$ ... che sono *analogie di differenze.*

241. Ma se l'archetto $\Delta b = CD$ è così piccolo che si può considerare come infinitesimo, tutte le altre differenze lo saranno in proporzione, e per il § 224 si avrà $\frac{\partial B}{\partial b} = \frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,a}$ ... che sono *analogie differenziali.*

Così in un triangolo, in cui si conservano costanti un lato, e l'angolo adjacente, la *variazione differenziale dell' angolo adjacente al lato costante* sta al *seno dell' angolo opposto al lato costante* come la *variazione del lato adjacente all' angolo costante* sta al *seno del lato opposto all'angolo costante.*

242. Le analogie di *differenze* del § 240 danno con tutto rigore

$$sen\,\Delta B = \frac{\text{sen}\,\Delta b\ \text{sen}\,C}{\text{sen}\,(a+\Delta a)} = \frac{\text{sen}\,\Delta b\ \text{sen}\,(C-\Delta C)}{\text{sen}\,a}$$

$$sen\,\Delta b = \frac{\text{sen}\,\Delta B\ \text{sen}\,(a+\Delta a)}{\text{sen}\,C} = \frac{\text{sen}\,\Delta B\ \text{sen}\,a}{\text{sen}\,(C-\Delta C)}$$

243. Sembrerebbe da quest' equazioni che fosse lecito anche fare

$$sen\,C = \frac{\text{sen}\,\Delta B\ \text{sen}\,(a+\Delta a)}{\text{sen}\,\Delta b},$$ ovvero

$$sen\,a = \frac{\text{sen}\,\Delta b\ \text{sen}\,(C-\Delta C)}{\text{sen}\,\Delta B}$$

ma bisogna avvertire, che per quanto legitimo e sicuro sia il calcolo di una variazione per mezzo delle altre, non si deve mai cercare una quantità grande per mezzo delle piccole; come un lato o un'angolo del triangolo per mezzo delle variazioni dei suoi elementi. Perchè un piccolo errore sulla variazione moltiplica a dismisura l'errore che si commetterà nel lato o angolo che se ne deduce, in ragione pressappoco del rapporto della variazione al suo errore. All'incontro non influirà nella ricerca di una variazione un piccolo errore su di un lato, o di un angolo; e vi sono de' casi in cui basta che essi siano conosciuti prossimamente. Si può in somma passare con sicurezza con le quantità grandi alla determinazione delle piccole; ma il passaggio contrario è quasi sempre pericoloso. Di quì si vede, come tante formole matematiche, esattissime o legitime al tavolino, nella pratica poi non danno veruna esattezza.

244. Applicando al triangoletto differenziale BDC l'analogia di Nepero darà

$$tan \tfrac{1}{2}(BD+BC) = tan \tfrac{1}{2} CD \times \frac{\cos \tfrac{1}{2}(BCD - D)}{\cos \tfrac{1}{2}(BCD+D)},$$

ovvero

$$tan \tfrac{1}{2}(a + a + \Delta a) = tan\,(a + \tfrac{1}{2}\Delta a, =$$

$$tan \tfrac{1}{2}\Delta b \times \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\,180 - C - (C - \Delta C)\,)}{\cos \tfrac{1}{2}(180 - C + C - \Delta C)}$$

$$= tan \tfrac{1}{2}\Delta b \times \frac{\text{sen}\,(C - \tfrac{1}{2}\Delta C)}{-\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\Delta C}$$ ... il segno negativo di ΔC (§ 239) perchè questa variazione è in senso contrario alle altre. Da quì

$$\frac{\tan \tfrac{1}{2}\Delta b}{-\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\Delta C} = \frac{\tan\,(a + \tfrac{1}{2}\Delta a)}{\text{sen}\,(C - \tfrac{1}{2}\Delta C)},$$ *analogia di differenza.*

Ma in questa supposto Δb infinitesimo

$$\frac{\delta b}{-\delta C} = \frac{\tan a}{\text{sen } C},\ \textit{analogia differenziale}.$$

Quì, e nelle consimili, non è necessario introdurre r'', perchè dovendo mettersi al numeratore ed al denominatore, il rapporto $\frac{-\delta C}{\delta b}$ resta lo stesso.

245. Ma generalmente per avere le variazioni dei triangoli si sostituiscano una dopo l'altra partitamente nella formola del problema le differenziali delle funzioni date sopra, e secondo le note regole del calcolo differenziale se ne tratti ciascuna parte come se non contenesse altra variabile che quella sola sulla quale si opera nel momento.

Sia la formola $x = ayz + b$, dove a, b sono costanti. Nel primo membro dove x è solo in vece di x si scriva δx. Nel secondo vi sono due variabili, onde si metterà $az\delta y$ in vece di y, ed $ay\delta z$ in vece di z. Le quantità a, b non hanno variazioni perchè costanti. Così l'equazione primitiva si convertirà in quest'altra

$$\delta x = ay\delta z + az\delta y$$

dove si vede che la variazione totale δx è formata di una parte dipendente dalla variazione δy, e di una seconda dipendente dalla variazione δz. Queste due parti saranno note partitamente quando lo siano δy e δz, perchè le parti ad esse dovute sono $ay\delta z$ ed $az\delta y$.

Nello stesso modo se si ha la formola $mx = abxyz + c$. Operando in essa come sopra darà l'equazione differenziale $m\delta x = abyz\delta x + abxz\delta y + abxy\delta z$

oppure $\delta x = \frac{ab}{m}(yz\delta x + xz\delta y + xy\delta z)$. Onde se

x, y, z, rappresentino le funzioni variabili delle parti del triangolo; δx, δy, δz le loro variazioni, tale sostituzione riuscirà facilissima.

246. Siano nel triangolo al Polo al Zenit ad all'Astro (fig. 16) costanti li lati ZP, e $P\sigma$ la collatitudine, e la codeclinazione, e subisca un cambiamento conosciuto l'angolo P, si domanda di quanto per cagione del cambiamento di P venga a cambiare il lato opposto $Z\sigma$, o sia la Distanza dal Zenit. Per rendere più generali le notazioni, nel triangolo ABC (fig. 14) siano costanti b, a, e per mezzo della variazione ΔC si cerchi Δc. La formola sarà

$$\cos c = \cos C \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b$$

in vece di $\cos c$ si metta $-\delta c \operatorname{sen} c$, e in vece di $\cos C$ si metta $-\delta C \operatorname{sen} C$: le costanti non subiscono variazioni; onde si avrà subito la formola *differenziale*

$$-\delta c \operatorname{sen} c = -\delta C \operatorname{sen} C \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b, \text{ d'onde}$$

$$\frac{\delta c}{\delta C} = \frac{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} c} = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} a$$

(§ 67).

247. Che se la variazione ΔC sia tale da non potersi supporre infinitesima, si avrà, ricorrendo alle *differenze*,

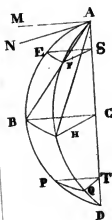
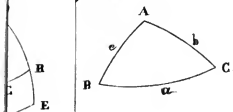
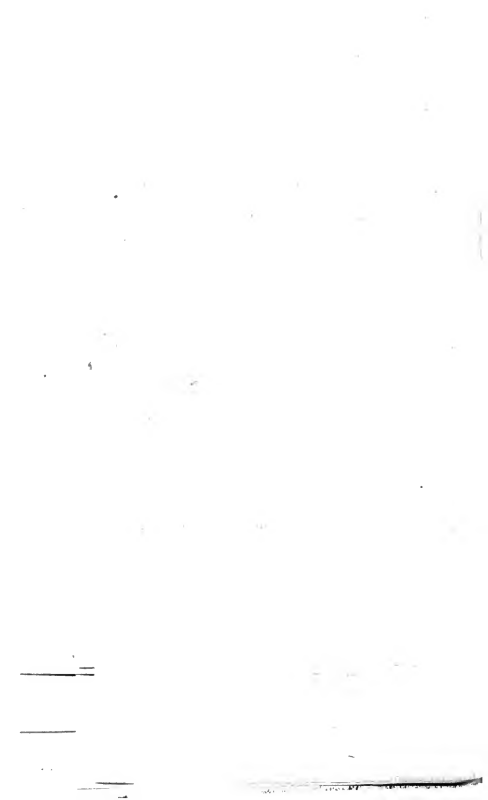
$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta c}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta C} = \frac{\operatorname{sen} (C + \frac{1}{2} \Delta C) \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} (c + \frac{1}{2} \Delta c)}$$

E questa analogia, perchè rigorosa, non meno che tutte le altre formate per la via delle *differenze*, sono teoremi in matematica, ugualmente che le formole fondamentali dalla cui differenziazione son nate.

Fuori de' limiti del nostro piano ci condurrebbe la formazione delle tavole, che fanno in un momen-

to trovare le analogie differenziali adattate ai diversi casi; e quali più o meno distese trovansi in varii autori. Ma poichè sono esse di grand'uso nella pratica astronomia, nella quale gli elementi de' triangoli cambiano spessissimo da uno stato all'altro, noi raccomandiamo ai nostri alunni di studiare questa materia nei Cap. XII e XXI della Trigonometria del Cagnoli, il quale in molti problemi ne ha spinto l'uso forse al di là del bisogno. Utile esercizio sarebbe per loro quello di trasmutare alla nostra maniera la notazione un poco incommoda di quest' autore. Troveranno come esercitarsi ancora nel Cap. X dell'Astronomia di De-Lambre.

B
B'
M'
M
A'
A
M
A
N
E
S
Y
B
C
H
P
T
Q
D

Fig. 14
A
B
C
a
b
c
B
E

TAVOLE.

TAV. I. cont. *Espressioni di* sen *a*.

15	$\dfrac{\text{sen } 2a}{\sqrt{(2(1+\cos 2a))}}$	80
16	$\dfrac{\text{sen } 2a}{2 \cos a}$	78
17	$\dfrac{\text{sen } (30+a) - \text{sen } (30-a)}{\sqrt{3}}$	253
18	$\cos (30-a) - \cos (30+a)$	253
19	$2 \text{ sen}^2 (45+\frac{1}{2} a) - 1$	243
20	$1 - 2 \text{ sen}^2 (45-\frac{1}{2} a)$	243
21	$1 - 2 \cos^2 (45+\frac{1}{2} a)$	249
22	$2 \cos^2 (45-\frac{1}{2} a) - 1$	243
23	$\dfrac{\tan^2 (45+\frac{1}{2} a) - 1}{\tan^2 (45+\frac{1}{2} a) + 1}$	244
24	$\dfrac{1 - \tan^2 (45-\frac{1}{2} a)}{1 + \tan^2 (45-\frac{1}{2} a)}$	244
25	$\dfrac{\tan (45+\frac{1}{2} a) - \tan (45-\frac{1}{2} a)}{\tan (45+\frac{1}{2} a) + \tan (45-\frac{1}{2} a)}$	245
26	$\text{sen } (60+a) - \text{sen } (60-a)$	258
27	$\dfrac{\cos (60-a) - \cos (60+a)}{\sqrt{3}}$	25
28	$\dfrac{1}{\text{cosec } a}$	27

Tav. II. *Espressioni di* cos a.

1	$\frac{\text{sen } a}{\tan a}$	25
2	$\text{sen } a \cot a$	29
3	$\sqrt{(1 - \text{sen}^2 a)}$	22
4	$\frac{1}{\sqrt{(1 + \tan^2 a)}}$	26
5	$\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\cot^2 a}\right)}}$	30
6	$\frac{\cot a}{\sqrt{(1 + \cot^2 a)}}$	30
7	$\cos^2 \frac{1}{2} a - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a$	83
8	$1 - 2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} a$	83
9	$2 \cos^2 \frac{1}{2} a - 1$	83
10	$\frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2} a}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a}$	83
11	$\frac{\cot^2 \frac{1}{2} a - 1}{\cot^2 \frac{1}{2} a + 1}$	211
12	$\frac{\cot \frac{1}{2} a - \tan \frac{1}{2} a}{\cot \frac{1}{2} a + \tan \frac{1}{2} a}$	213
13	$\frac{\cot a}{\cot \frac{1}{2} a - \cot a}$	215
14	$\frac{\tan \frac{1}{2} a}{\tan a - \tan \frac{1}{2} a}$	215

TAV. II. cont. *Espressioni di* cos a

15	$\frac{1}{1+\tan\frac{1}{2}a\tan a}$	220
16	$\frac{\cot\frac{1}{2}a\cot a}{1+\cot\frac{1}{2}a\cot a}$	220
17	$\frac{1}{\cot\frac{1}{2}a\tan a-1}$	221
18	$\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}$	73
19	$\frac{\text{sen } 2a}{\sqrt{(2(1-\cos 2a))}}$	79
20	$\frac{\text{sen } 2a}{2\text{ sen } a}$	78
21	$\frac{\cos(30+a)+\cos(30-a)}{\sqrt{3}}$	252
22	$\text{sen}(30+a)+\text{sen}(30-a)$	252
23	$2\cos(45+\frac{1}{2}a)\cos(45-\frac{1}{2}a)$	247
25	$2\text{ sen}(45+\frac{1}{2}a)\text{ sen}(45-\frac{1}{2}a)$	267
24	$\frac{2}{\tan(45+\frac{1}{2}a)+\tan(45-\frac{1}{2}a)}$	246
26	$\cos(60+a)+\cos(60-a)$	257
27	$\frac{\text{sen}(60+a)+\text{sen}(60-a)}{\sqrt{3}}$	257
28	$\frac{1}{\sec a}$	26

Tav. III. *Espressioni di* tan a.

1	$\dfrac{\text{sen}\, a}{\cos a}$	25
2	$\dfrac{1}{\cot a}$	29
3	$\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos^2 a} - 1\right)}$	23 26
4	$\dfrac{\sqrt{(1 - \cos^2 a)}}{\cos a}$	32
5	$\dfrac{\text{sen}\, a}{\sqrt{(1 - \text{sen}^2 a)}}$	52
6	$\sqrt{\left(\dfrac{1 - \cos^2 a}{1 - \text{sen}^2 a}\right)}$	32
7	$\dfrac{2 \tan \frac{1}{2} a}{1 - \tan^2 \frac{1}{2} a}$	84
8	$\dfrac{2 \cot \frac{1}{2} a}{\cot^2 \frac{1}{2} a - 1}$	84
9	$\dfrac{2}{\cot \frac{1}{2} a - \tan \frac{1}{2} a}$	84
10	$\dfrac{2\, \text{sen}\, \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{\cos^2 \frac{1}{2} a - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a}$	85
11	$\dfrac{2\, \text{sen}\, \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{1 - 2\, \text{sen}^2 \frac{1}{2} a}$	85
12	$\dfrac{2\, \text{sen}\, \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{2 \cos^2 \frac{1}{2} a - 1}$	85
13	$\cot a - 2 \cot 2a$	201

Tav. III. cont. *Espressioni di* tan a.

14	$\sqrt{\left(\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}\right)}$	74
15	$\frac{\text{sen } 2a}{2\cos^2 a}$	76
16	$\frac{\text{sen } 2a}{1+\cos 2a}$	76
17	$\frac{2\,\text{sen}^2 a}{\text{sen } 2a}$	76
18	$\frac{1-\cos 2a}{\text{sen } 2a}$	77
19	$\frac{1}{\text{sen } 2a} - \cot 2a$	203
20	$\frac{1}{\frac{1}{\text{sen } 2a} + \cot 2a}$	205
21	$\frac{\cos(30-a) - \cos(30+a)}{\text{sen}(30+a) + \text{sen}(30-a)}$	253
22	$\frac{\text{sen}(30+a) - \text{sen}(30-a)}{\cos(30+a) + \cos(30-a)}$	253
23	$\frac{\tan(45+\frac{1}{2}a) - \tan(45-\frac{1}{2}a)}{2}$	237
24	$\frac{\text{sen}(60+a) - \text{sen}(60-a)}{\cos(60+a) + \cos(60-a)}$	259
25	$\frac{\cos(60-a) - \cos(60+a)}{\text{sen}(60+a) + \text{sen}(60-a)}$	259
26	$\frac{\sec}{\text{cosec}}$	28

Tav. IV. *Espressioni relative all'arco ed al raggio.*

N.	Espressione	Rif.
1 2	$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen}\,(45 \pm a)\\ \cos\,(45 \mp a)\end{array}\right\} = \dfrac{\cos a \pm \mathrm{sen}\, a}{\sqrt{2}}$	229
3	$\tan\,(45 \pm a) = \dfrac{\cos a \pm \mathrm{sen}\, a}{\cos a \mp \mathrm{sen}\, a} = \dfrac{1 \pm \tan a}{1 \mp \tan a}$	230 231
4	$\tan^2\,(45 \pm \frac{1}{2} a) = \dfrac{1 \pm \mathrm{sen}\, a}{1 \mp \mathrm{sen}\, a} = \dfrac{\tan\,(45 + \frac{1}{2} a)}{\tan\,(45 - \frac{1}{2} a)}$	241 242
5 6	$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sen}^2\,(45 \pm \frac{1}{2} a)\\ \cos^2\,(45 \mp \frac{1}{2} a)\end{array}\right\} = \dfrac{1 \pm \mathrm{sen}\, a}{2}$	240
7	$\tan\,(45 \pm \frac{1}{2} a) = \dfrac{1 \pm \mathrm{sen}\, a}{\cos a} = \dfrac{\cos a}{1 \mp \mathrm{sen}\, a}$	261 262
8	$\tan\,(45 + a) - \tan\,(45 - a) = \dfrac{4 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	236
9	$\mathrm{sen}\,(30 \pm a) = \cos\,(60 \mp a) = \frac{1}{2} \cos a \pm \frac{1}{2} \mathrm{sen}\, a \sqrt{3}$	249 255
10	$\cos\,(30 \pm a) = \mathrm{sen}\,(60 \mp a) = \frac{1}{2} \cos a \sqrt{3} \pm \frac{1}{2} \mathrm{sen}\, a$	250 260
11	$\tan\,(30 \pm a) = \dfrac{1 \pm \tan a \sqrt{3}}{\sqrt{3} \mp \tan a} = \dfrac{\cot a \pm \sqrt{3}}{\cot a \sqrt{3} \mp 1}$	
12	$\tan\,(60 \pm a) = \dfrac{\sqrt{3} \pm \tan a}{1 \mp \tan a \sqrt{3}} = \dfrac{\cot a \sqrt{3} \pm 1}{\cot a \mp \sqrt{3}}$	
13	$1 \pm \mathrm{sen}\, a = \dfrac{(1 \pm \tan \frac{1}{2} a)^2}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a} = \dfrac{(\cot \frac{1}{2} a \pm 1)^2}{\cot^2 \frac{1}{2} a + 1}$	216 217
13	$\dfrac{1 - \mathrm{sen}\, a}{1 + \mathrm{sen}\, a} = \left(\dfrac{1 - \tan \frac{1}{2} a}{1 + \tan \frac{1}{2} a}\right)^2 = \left(\dfrac{\cot \frac{1}{2} a - 1}{\cot \frac{1}{2} a + 1}\right)^2$	218
14	$1 + \cos a = \dfrac{2}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a} = \dfrac{2 \cot^2 \frac{1}{2} a}{\cot^2 \frac{1}{2} + 1}$	211
15	$1 - \cos a = \dfrac{2 \tan^2 \frac{1}{2} a}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a} = \dfrac{2}{\cot^2 \frac{1}{2} a + 1}$	211

Tav. V. *Espressioni relative a due archi.*

1	$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cos b + \cos a\,\text{sen}\,b$	51
2	$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a \cos b - \cos a\,\text{sen}\,b$	51
3	$\cos\,(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$	54
4	$\cos\,(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$	
5	$\tan\,(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \dfrac{\cot b + \cot a}{\cot b \cot a - 1}$	58
6	$\tan\,(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \dfrac{\cot b - \cot a}{\cot b \cot a + 1}$	60
7	$\dfrac{\text{sen}\,(a+b)}{\text{sen}\,(a-b)} = \dfrac{\tan a - \tan b}{\tan a + \tan b} = \dfrac{\cot b - \cot a}{\cot b + \cot a}$	159
8	$\dfrac{\text{sen}\,(a+b)}{\cos\,(a-b)} = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \dfrac{\cot b + \cot a}{\cot b \cot a + 1}$	165
9	$\dfrac{\cos\,(a+b)}{\text{sen}\,(a-b)} = \dfrac{1 - \tan a \tan b}{\tan a - \tan b} = \dfrac{\cot a \cot b - 1}{\cot b - \cot a}$	163
10	$\dfrac{\cos\,(a+b)}{\cos\,(a-b)} = \dfrac{1 - \tan a \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \dfrac{\cot a \cot b - 1}{\cot a \cot b + 1}$	161
11	$\tan \tfrac{1}{2}(a \pm b) = \dfrac{\text{sen}\,a \pm \text{sen}\,b}{\cos a + \cos b} = \dfrac{\cos b - \cos a}{\text{sen}\,a \mp \text{sen}\,b}$	169 170
12	$\dfrac{\tan \frac{1}{2}(a+b)}{\tan \frac{1}{2}(a-b)} = \dfrac{\text{sen}\,a + \text{sen}\,b}{\text{sen}\,a - \text{sen}\,b}$	167
13	$\dfrac{\tan \frac{1}{2}(a+b)}{\cot \frac{1}{2}(a-b)} = \dfrac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}$	168
14	$\dfrac{1 + \tan \frac{1}{2}(a \pm b)}{1 - \tan \frac{1}{2}(a \pm b)} = \dfrac{\text{sen}\,a + \cos b}{\cos a \mp \text{sen}\,b}$	171 173
15	$\dfrac{\cot \frac{1}{2}(a \pm b) + 1}{\cot \frac{1}{2}(a \pm b) - 1} = \dfrac{\cos a \pm \text{sen}\,b}{\cos b - \text{sen}\,a}$	172 174

TAV. V. cont. *Espressioni relative a due archi.*

16	$\tan\frac{1}{2}(a+b) + \tan\frac{1}{2}(a-b) = \frac{2\,\text{sen}\,a}{\cos a + \cos b}$	135
17	$\tan\frac{1}{2}(a+b) - \tan\frac{1}{2}(a-b) = \frac{2\,\text{sen}\,b}{\cos a + \cos b}$	136
18	$\cot\frac{1}{2}(a+b) + \cot\frac{1}{2}(a-b) = \frac{2\,\text{sen}\,a}{\cos b - \cos a}$	137
19	$\cot\frac{1}{2}(a-b) - \cot\frac{1}{2}(a+b) = \frac{2\,\text{sen}\,b}{\cos b - \cos a}$	138
20	$\text{sen}\,a + \text{sen}\,b = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$	121
21	$\text{sen}\,a - \text{sen}\,b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-b)$	122
22	$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$	123
23	$\cos b - \cos a = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a-b)$	124
24	$\tan a \pm \tan b = \frac{\text{sen}\,(a \pm b)}{\cos a \cos b}$	180 181
25	$\tan a \pm \tan b = \frac{2\,\text{sen}\,(a \pm b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$	113
26	$\cot b \pm \cot a = \frac{\text{sen}\,(a \pm b)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}$	182 183
27	$\cot b \pm \cot a = \frac{2\,\text{sen}\,(a \pm b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)}$	214
28	$\cot b \pm \tan a = \frac{\cos(a \mp b)}{\cos a\,\text{sen}\,b}$	184 185
29	$\cot a \pm \tan b = \frac{\cos(a \mp b)}{\text{sen}\,a \cos b}$	186 187
30	$\text{sen}\,a\cos b = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(a+b) + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(a-b)$	87
31	$\cos a\,\text{sen}\,b = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(a+b) - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(a-b)$	88
32	$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$	89
33	$\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$	90

TAV. V. cont. *Espressioni relative a due archi.*

34	$\text{sen}\, a\ \text{sen}\, b \begin{cases} = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(a+b) - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(a-b) \\ = \cos^2 \tfrac{1}{2}(a-b) - \cos^2 \tfrac{1}{2}(a+b) \end{cases}$	197 198
35	$\cos a \cos b \begin{cases} = \cos^2 \tfrac{1}{2}(a-b) - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(a+b) \\ = \cos^2 \tfrac{1}{2}(a+b) - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}(a-b) \end{cases}$	156 156
36	$\tan a \tan b = \dfrac{\text{sen}^2 (a+b) - \text{sen}^2 (a-b)}{4 \cos^2 a \cos^2 b}$	194
37	$\cot a \cot b = \dfrac{\text{sen}^2 (a+b) - \text{sen}^2 (a-b)}{4\, \text{sen}^2 a\ \text{sen}^2 b}$	195
38	$\dfrac{\tan a}{\tan b} = \dfrac{\text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}\,(a+b) - \text{sen}\,(a-b)} = \dfrac{\cot b}{\cot a}$	112
39 40	$\left.\begin{array}{l} \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b \\ \cos^2 b - \cos^2 a \end{array}\right\} = \text{sen}\,(a+b)\ \text{sen}\,(a-b)$	155
41 42	$\left.\begin{array}{l} \cos^2 b - \text{sen}^2 a \\ \cos^2 a - \text{sen}^2 b \end{array}\right\} = \cos (a+b) \cos (a-b)$	156
43	$\text{sen}^2 a + \text{sen}^2 b = 1 - \cos (a+b) \cos (a-b)$	153
44	$\cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos (a+b) \cos (a-b)$	154
45	$\tan^2 a - \tan^2 b = \dfrac{\text{sen}\,(a+b)\ \text{sen}\,(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$	188
46	$\cot^2 b - \cot^2 a = \dfrac{\text{sen}\,(a+b)\ \text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}^2 a\ \text{sen}^2 b}$	189
47	$\cot^2 b - \tan^2 a = \dfrac{\cos (a+b) \cos (a-b)}{\cos^2 a\ \text{sen}^2 b}$	190
48	$\cot^2 a - \tan^2 b = \dfrac{\cos (a+b) \cos (a-b)}{\text{sen}^2 a \cos^2 b}$	191
49	$\tan^2 a + \tan^2 b = \dfrac{\text{sen}^2 (a+b) + \text{sen}^2 (a-b)}{2 \cos^2 a \cos^2 b}$	192
50	$\cot^2 a + \cot^2 b = \dfrac{\text{sen}^2 (a+b) + \text{sen}^2 (a-b)}{2\, \text{sen}^2 a\ \text{sen}^2 b}$	193

TAV. VI. *Serie trigonometriche.*

1 $a = \text{sen}\, a + \frac{\text{sen}^3 a}{2.3} + \frac{3.\text{sen}^5 a}{2.4.5} + \frac{3.5.\text{sen}^7 a}{3.4.6.7} + \text{ec.}$ 273

2 $a = 1{,}5707963 - \cos a - \frac{\cos^3 a}{2.3} - \frac{3\cos^5 a}{2.4.5} - \frac{3.5.\cos^7 a}{2.4.6.7} - \text{ec.}$ (275

3 $a = \tan a - \frac{1}{3}\tan^3 a + \frac{1}{5}\tan^5 a - \frac{1}{7}\tan^7 a + \text{ec.}$ 277

4 $\text{sen}\, a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{ec.}$ 279

5 $\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6.} + \text{ec.}$ 281

6 $\tan a = a + \frac{a^3}{3} + \frac{2a^5}{3.5} + \frac{17a^7}{3^2.5.7} + \frac{62a^9}{3^2.5.7.9} + \text{ec.}$ 283

7 $\cot a = \frac{1}{a} - \frac{a}{3} - \frac{a^3}{3^2.5} - \frac{2a^5}{3^3.5.7} - \frac{a^7}{3^3.5^2.7} - \text{ec.}$ 285

8 $\text{sen v.}\, a = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{a^2}{3.4} + \frac{a^4}{3.4.5.6} - \frac{a^6}{3.4.5.6.7.8} + \text{ec.}\right)$ (282

9 Arco *meno* Corda $= \frac{\text{sen}^3 \frac{1}{2} a}{3} + \frac{3\,\text{sen}^5 \frac{1}{2} a}{4.5} + \frac{3.5.\text{sen}^7 \frac{1}{2} a}{4.6.7} + \text{ec.}$ 286

10 $= \frac{a^3}{2.3.2^2} - \frac{a^5}{2.3.4.5.2^4} + \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7\,2^6} - \text{ec.}$ 286

TAV. VII. *Differenze trigonometriche*

1	$\Delta \text{ sen } a = 2 \text{ sen } \frac{1}{2} \Delta a \cos(a + \frac{1}{2} \Delta a)$	218
2	$\Delta \cos a = - 2 \text{ sen } \frac{1}{2} \Delta a \text{ sen } (a + \frac{1}{2} \Delta a)$	219
3	$\Delta \tan a = \frac{\text{sen } \Delta a}{\cos a \cos (a + \Delta a)}$	220
4	$\Delta \cot a = \frac{- \text{sen } \Delta a}{\text{sen } a \text{ sen } (a + \Delta a)}$	221
5	$\Delta \sec a = \frac{2 \text{ sen } \frac{1}{2} \Delta a \text{ sen } (a + \frac{1}{2} \Delta a)}{\cos a \cos (a + \Delta a)}$	222
6	$\Delta \text{ cosec } a = \frac{- 2 \text{ sen } \frac{1}{2} \Delta a \cos (a + \frac{1}{2} \Delta a)}{\text{sen } a \text{ sen } (a + \Delta a)}$	225
7	$\Delta \text{ sen}^2 a = \text{sen } \Delta a \text{ sen } (2a + \Delta a)$	231
8	$\Delta \cos^2 a = - \text{ sen } \Delta a \text{ sen } (2a + \Delta a)$	231
9	$\Delta \tan^2 a = \frac{\text{sen } \Delta a \text{ sen } (2a + \Delta a)}{\cos^2 a \cos^2 (a + \Delta a)} = \Delta \sec^2 a$	232
10	$\Delta \cot^2 a = \frac{- \text{ sen } \Delta a \text{ sen } (2a + \Delta a)}{\text{sen}^2 a \text{ sen}^2 (a + \Delta a)} = \text{cosec}^2 a$	233

Quantità ausiliarie.

x, y due quantità ineguali

$$\frac{x}{y} = \tan z$$

$$(z \backsim 45^\circ) = \frac{x \backsim y}{x + y}$$

Tav. VIII. *Differenziali trigonometriche.*

11	$\vartheta \,\text{sen}\, a = \vartheta a \cos a$	225
12	$\vartheta \cos a = -\vartheta a \,\text{sen}\, a$	226
13	$\vartheta \tan a = \dfrac{\vartheta a}{\cos^2 a}$	227
14	$\vartheta \cot a = \dfrac{-\vartheta a}{\text{sen}^2 a}$	228
15	$\vartheta \sec a = \dfrac{\vartheta a \tan a}{\cos a}$	229
16	$\vartheta \,\text{cosec}\, a = \dfrac{-\vartheta a \cot a}{\text{sen}\, a}$	230
17	$\vartheta \,\text{sen}^2 a = 2\vartheta a \,\text{sen}\, a \cos a$	236
18	$\vartheta \cos^2 a = -2\vartheta a \,\text{sen}\, a \cos a$	236
19	$\vartheta \tan^2 a = \dfrac{2\vartheta a \tan a}{\cos^2 a} = \vartheta \sec^2 a$	237
20	$\vartheta \cot^2 a = \dfrac{-2\vartheta a \cot a}{\text{sen}^2 a} = \vartheta \,\text{cosec}^2 a$	238

Arco ausiliario.

$\text{fun}\ m = \text{fun}\ n\ \text{fun}\ p,$

$fun\ n\ fun\ p = \tan y$

$\tan^2 x = \tan (45 - y)$

$m = 90 - 2x$

TAV. IX. *Espressioni analitiche di ciascuna parte del triangolo sferico, in tre delle altre.*

Angoli A, B, C : lati opposti a, b, c

1 $\quad \text{sen}\, a = \dfrac{\text{sen}\, A \,\text{sen}\, c}{\text{sen}\, C}$

2 $\quad \text{sen}\, a = \dfrac{\text{sen}\, A \,\text{sen}\, b}{\text{sen}\, B}$

3 $\quad \cos a = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C}$

4 $\quad \cos a = \cos A \,\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c + \cos b \cos c$

5 $\quad \tan a = \dfrac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, B \cot A + \cos B \cos c}$

6 $\quad \tan a = \dfrac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, C \cot A + \cos C \cos b}$

7 $\quad \text{sen}\, b = \dfrac{\text{sen}\, B \,\text{sen}\, a}{\text{sen}\, A}$

8 $\quad \text{sen}\, b = \dfrac{\text{sen}\, B \,\text{sen}\, c}{\text{sen}\, C}$

9 $\quad \cos b = \dfrac{\cos B + \cos A \cos C}{\text{sen}\, A \,\text{sen}\, C}$

10 $\quad \cos b = \cos B \,\text{sen}\, a \,\text{sen}\, c + \cos a \cos c$

11 $\quad \tan b = \dfrac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, C \cot B + \cos C \cos a}$

12 $\quad \tan b = \dfrac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, A \cot B + \cos A \cos c}$

13 $\quad \text{sen}\, c = \dfrac{\text{sen}\, C \,\text{sen}\, b}{\text{sen}\, B}$

TAV. IX. cont. *Espressioni analitiche di ciascuna parte del triangolo sferico, in tre delle altre.*

Angoli A, B, C : lati opposti a, b, c

14 $\text{sen}\, c = \dfrac{\text{sen}\, C \,\text{sen}\, a}{\text{sen}\, A}$

15 $\cos c = \dfrac{\cos C + \cos A \cos B}{\text{sen}\, A \,\text{sen}\, B}$

16 $\cos c = \cos C \,\text{sen}\, a \,\text{sen}\, b + \cos a \cos b$

17 $\tan c = \dfrac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, A \cot C + \cos A \cos b}$

18 $\tan c = \dfrac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, B \cot C + \cos B \cos a}$

19 $\text{sen}\, A = \dfrac{\text{sen}\, a \,\text{sen}\, C}{\text{sen}\, c}$

20 $\text{sen}\, A = \dfrac{\text{sen}\, a \,\text{sen}\, B}{\text{sen}\, b}$

21 $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}$

22 $\cos A = \cos a \,\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C - \cos B \cos C$

23 $\tan A = \dfrac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, c \cot a - \cos c \cos B}$

24 $\tan A = \dfrac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, b \cot a - \cos b \cos C}$

25 $\text{sen}\, B = \dfrac{\text{sen}\, b \,\text{sen}\, A}{\text{sen}\, a}$

26 $\text{sen}\, B = \dfrac{\text{sen}\, b \,\text{sen}\, C}{\text{sen}\, c}$

TAV. IX. cont. *Espressioni analitiche di ciascuna parte del triangolo sferico, in tre delle altre.*

Angoli A, B, C : lati opposti a, b, c

27 $$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\text{sen}\, a\ \text{sen}\, c}$$

28 $$\cos B = \cos b\ \text{sen}\, A\ \text{sen}\, C - \cos A \cos C$$

29 $$\tan B = \frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, a \cot b - \cos a \cos C}$$

30 $$\tan B = \frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, c \cot b - \cos c \cos A}$$

31 $$\text{sen}\, C = \frac{\text{sen}\, c\ \text{sen}\, B}{\text{sen}\, b}$$

32 $$\text{sen}\, C = \frac{\tan c\ \text{sen}\, A}{\text{sen}\, a}$$

33 $$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\text{sen}\, a\ \text{sen}\, b}$$

34 $$\cos C = \cos c\ \text{sen}\, A\ \text{sen}\, B - \cos A \cos B$$

35 $$\tan C = \frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, b \cot c - \cos b \cos A}$$

36 $$\tan C = \frac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, a \cot c - \cos a \cos B}$$

37 $$\tan \tfrac{1}{2}(B+C) \tan \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos \frac{1}{2}(b \backsim c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)}$$

38 $$\tan \tfrac{1}{2}(B \backsim C) \tan \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{sen}\, \frac{1}{2}(b \backsim c)}{\text{sen}\, \frac{1}{2}(b+c)}$$

39 $$\tan \tfrac{1}{2}(b+c) \cot \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{1}{2}(B \backsim C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)}$$

40 $$\tan \tfrac{1}{2}(b \backsim c) \cot \tfrac{1}{2} a = \frac{\text{sen}\, \frac{1}{2}(B \backsim C)}{\text{sen}\, \frac{1}{2}(B+C)}$$

41 $$\frac{\text{sen}\, \frac{1}{2} a}{\text{sen}\, \frac{1}{2} A} = \frac{\text{sen}\, \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(B \backsim C)}$$ ... 43 $$\frac{\cos \frac{1}{2} a}{\text{sen}\, \frac{1}{2} A} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)}$$

42 $$\frac{\text{sen}\, \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} A} = \frac{\text{sen}\, \frac{1}{2}(b \backsim c)}{\text{sen}\, \frac{1}{2}(B \backsim C)}$$ ... 44 $$\frac{\cos \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} A} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b \backsim c)}{\text{sen}\, \frac{1}{2}(B+C)}$$

Tav. X. *Soluzioni del triangolo sferico rettangolo.*

DATI	CERCATO	SOLUZIONI
1 L'Ipotenusa, ed un'angolo	*Lato opposto* all'angolo dato..........	... seno *lato opposto* cercato = *sen* dell' Ipot. × *sen* angolo dato.
	Lato adjacente all'angolo dato......	... tan *lato adjacente* cercato = *tan* Ipotenusa × *cos* angolo dato.
	L' altro angolo.....	... cot *angolo* cercato = *cos* Ipotenusa × *tan* angolo dato.
2 L'Ipotenusa, ed un lato.	*Angolo opposto* al lato dato..........	... sen *angolo opposto* cercato = $\frac{\textit{sen}\ \text{lato dato}}{\textit{sen}\ \text{Ipotenusa}}$.
	Angolo adjacente al lato dato...........	... cos *angolo adjacente* cercato = *cot* Ipotenusa × *tan* lato dato.
	Terzo lato.........	... cos *lato* cercato = $\frac{\textit{cos}\ \text{Ipotenusa}}{\textit{cos}\ \text{lato dato}}$
3 Li due lati.	*Ipotenusa*..........	... cos *ipotenusa* = prodotto dei *coseni* dei lati dati.
	Angolo opposto ad un lato dato; oppure *Angolo* ad esso adj.	... cot *angolo* cercato = *sen* del lato adjacente all'angolo cercato × *cot* lato ad esso opposto.
4 Un lato, e l'angolo opposto.	*Ipotenusa*..........	... sen *ipotenusa* = $\frac{\textit{sen}\ \text{lato dato}}{\textit{sen}\ \text{angolo dato}}$
	L'altro *lato*....	... sen *lato* cercato = *tan* lato dato × *cot* angolo dato.
	L'altro *angolo*.......	... sen *angolo* cercato = $\frac{\textit{cos}\ \text{ang. dato}}{\textit{cos}\ \text{lato dato}}$
5 Un lato, e l'angolo adjacente.	*Ipotenusa*...........	... cot *ipotenusa* = *cos* ang. adj. dato × *cot* lato dato.
	L'altro *angolo*......	... cos *angolo* cercato = *sen* ang. adj. dato × *cos* lato dato.
	L'altro *lato*.........	... tan *lato* cercato = *tan* ang. adj. dato × *sen* lato dato.
6 Li due angoli.	*Ipotenusa*...........	... cos *ipotenusa* = prodotto delle *cotan* degli ang. dati.
	Lato opposto ad uno degli angoli dati, oppure *Lato* ad esso adjacente...............	... cos *lato* cercato = $\frac{\textit{cos}\ \text{angolo opposto al lato cercato}}{\textit{sen}\ \text{angolo adjacente al lato cercato}}$

Tav. XI. *Soluzioni dei triangoli sferici obbliquangoli.*

1 Dati. *Tre lati.*

Si cerca ... *Uno degli angoli.*

a lato opposto all'angolo cercato A. Lati che lo comprendono b, c

$$\tan \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}}$$

2 Dati. *Tre angoli.*

Si cerca ... *Uno dei lati.*

A angolo opposto al lato cercato a. Angoli adjacenti al lato cercato B, C

$$\tan \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-A\right)}{\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-B\right)\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-C\right)}}$$

3 Dati. *Due lati, e l'angolo compreso.*

Si cerca ... *Il terzo lato.*

Si chiamino x, y li due segmenti del maggiore dei lati dati

tan x = *cos* angolo dato $\times$ *tan* minore dei lati dati

y = differenza tra x e il maggior lato dato

cos lato cercato = *cos* minor lato dato $\frac{\cos y}{\cos x}$.

Se il lato cercato è piccolo.

Si chiami x' un arco ausiliario

cos x' = $\frac{\textit{cos}\text{ mezzo ang. dato}}{\textit{sen}\ \frac{1}{2}\text{ somma lati dati}}$ $\times$ $\sqrt{(\text{prodotto dei seni dei lati dati})}$

sen mezzo lato cercato = *sen* x' $\times$ *sen* semisomma lati dati.

TAV. XI. cont. *Soluzioni dei triangoli sferici obbliquangoli.*

Si cerca ... *Uno degli altri due angoli.*

Si chiamino x, y li *segmenti* del lato adjacente all' angolo cercato.

$\tan x = \cos$ angolo dato $\times$ *tan* lato opposto all'angolo cercato

$y =$ lato adjacente all'angolo cercato $- x$

tan angolo cercato $=$ *tan* angolo dato $\times \dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } y}$

Se x è maggiore del lato adjacente all'angolo cercato, sarà sen y negativo.

Si cercano insieme ... *Tutti gli elementi del triangolo.*

Si chiamino x, y due angoli ausiliarj

$$\tan x = \frac{\textit{tan} \text{ mezzo angolo dato} \times \textit{sen} \text{ semisomma lati dati}}{\textit{sen} \text{ semidifferenza lati dati}}$$

$$\tan y = \frac{\textit{tan} \text{ mezzo angolo dato} \times \textit{cos} \text{ semisomma lati dati}}{\textit{cos} \text{ semidifferenza lati dati}}$$

tan metà del terzo lato $=$ *tan* semidifferenza lati dati $\times \dfrac{\cos y}{\cos x}$

Angolo opposto al maggiore dei lati dati $= 180 - (x + y)$

Angolo opposto al minore dei lati dati $= y \backsim x$.

---

4 DATI. *Un lato, ed i due angoli adjacenti.*

Si cerca ... *Uno dei due lati ignoti*

Si chiamino x, y li segmenti dell' angolo adjacente al lato cercato

$\cot x =$ *tan* angolo opposto al lato cercato $\times$ *cos* lato dato

$y =$ differenza di x coll'angolo adjacente al lato cercato

tan lato cercato $=$ *tan* lato dato $\times \dfrac{\cos x}{\cos y}$.

TAV. XI. cont. *Soluzioni dei triangoli sferici obbliquangoli.*

Si cerca ... *Il terzò angolo, opposto al lato dato.*

Si chiamino x', y' li segmenti dell'angolo maggiore

cot x' = *cos* lato dato $\times$ *tan* minore degli angoli dati

y' = maggiore degli angoli dati — x'

cos angolo cercato = *cos* minore degli angoli dati $\times \dfrac{\text{sen } y'}{\text{sen } x'}$

Se x' è maggiore dell'angolo, sarà sen y' negativo.

Quando l'angolo cercato è piccolo

Si chiami x un'arco ausiliario

$$\tan x = \frac{sen \text{ mezzo lato dato}}{cos\ \frac{1}{2} \text{ somma angoli dati}} \times \sqrt{(\text{prodotto de' seni degli ang. dati})}$$

$$\text{sen mezzo angolo cercato} = \frac{cos \text{ semisomma angoli dati}}{cos\ x}.$$

Si cercano insieme ... *Tutti gli elementi del triangolo.*

Si chiamino x, y due archi ausiliarj

$$\tan x = \frac{cot \text{ mezzo lato dato} \times cos \text{ semisomma angoli dati}}{cos \text{ semidifferenza angoli dati}}$$

$$\tan y = \frac{cot \text{ mezzo lato dato} \times sen \text{ semisomma angoli dati}}{sen \text{ semidifferenza angoli dati}}$$

tan metà del terzo angolo = *cot* semi differenza angoli dati $\times \dfrac{\cos y}{\cos x}$

Lato opposto al maggiore degli angoli dati = $180 - (x+y)$

Lato opposto al minore degli angoli dati = $x \backsim y$.

TAV. XI. cont. *Soluzioni dei triangoli sferici obbliquangoli.*

5 DATI. *Due lati, ed un'angolo opposto ad uno di essi.*
Casi dubbj.

Si cerca ... *L'angolo opposto all'altro lato dato.*

$$\text{sen angolo cercato} = \frac{\textit{sen} \text{ lato opposto all'angolo cercato} \times \textit{sen} \text{ ang. dato}}{\textit{sen} \text{ lato opposto all'angolo dato}}$$

Dubbio se sia l' angolo, o il suo supplemento. Ma se la somma dei lati dati è $< 180°$, l'angolo opposto al lato minore è $< 90°$. Se la somma è $> 180°$, l'angolo opposto al lato maggiore è $> 90°$.

Si cerca ... *L' angolo contenuto tra li lati dati.*

Si chiamino x, y li segmenti dell'angolo cercato

$\cot x = \tan$ angolo dato $\times \cos$ lato adjacente all'angolo dato

$$\cos y = \frac{\cos x \times \tan \text{ lato adjacente all'angolo dato}}{\tan \text{ lato opposto all'angolo dato}}$$

Angolo cercato $= x \pm y$

$+$ quando gli angoli opposti ai lati dati sono della stessa specie;
$-$ quando sono di specie differente.

Si cerca ... *Il terzo lato.*

Si chiamino x, y li segmenti del lato cercato

$\tan x = \cos$ angolo dato $\times \tan$ lato adjacente all'angolo dato

$$\cos y = \cos x \times \frac{\cos \text{ lato opposto all' angolo dato}}{\cos \text{ lato adjacente all'angolo dato}}$$

Lato cercato $= x \pm y$

$x + y$ se la specie degli angoli opposti ai lati dati è la stessa:
$x - y$ se essa è diversa.

TAV. XI. cont. *Soluzioni dei triangoli sferici obbliquangoli.*

6 DATI. *Due angoli, ed un lato opposto ad uno di essi.*
Casi dubbj.

Si cerca ... *Il lato opposto all'altro degli angoli dati.*

$$\text{sen lato cercato} = \frac{\textit{sen} \text{ angolo opposto al lato cercato} \times \textit{sen} \text{ lato dato}}{\textit{sen} \text{ angolo opposto al lato dato}}$$

Si cerca ... *Il lato su cui giacciono gli angoli dati.*

Si chiamino x, y li segmenti del lato cercato

$\tan x = \textit{tan}$ lato dato $\times$ *cos* angolo adjacente al lato dato

$$\text{sen } y = \frac{\textit{sen } x \times \textit{tan} \text{ angolo adjacente al lato dato}}{\textit{tan} \text{ angolo opposto al lato dato}}$$

Lato cercato $= x \pm y$

Si cerca ... *Il terzo angolo.*

Si chiamino x, y li segmenti dell'angolo cercato

$\cot x = \textit{cos}$ lato dato $\times$ *tan* angolo adjacente al lato dato

$$\text{sen } y = \frac{\textit{sen } x \times \textit{cos} \text{ angolo opposto al lato dato}}{\textit{cos} \text{ angolo adjacente al lato dato}}$$

Angolo cercato $= x \pm y$

Sia che si cerchi il *lato* o *l'angolo*, se gli angoli dati sono della stessa specie si pigli $x + y$; se di specie diversa $x - y$.

Ma anche sen y può avere due valori.

Tav. XI. cont. *Soluzioni dei triangoli sferici obbliquangoli.*

7 Dati ... *Due lati, ed i due angoli opposti.*

Si cerca ... *Il terzo lato.*

$$\text{tan mezzo lato cercato} \begin{cases} = \textit{tan} \text{ semidifferenza lati dati} \times \dfrac{\textit{sen}\ \frac{1}{2} \text{ somma ang. dati}}{\textit{sen}\ \frac{1}{2} \text{ diff. angoli dati}} \\ = \textit{tan} \text{ semisomma lati dati} \times \dfrac{\textit{cos}\ \frac{1}{2} \text{ somma angoli dati}}{\textit{cos}\ \frac{1}{2} \text{ differ. angoli dati}} \end{cases}$$

Si cerca ... *Il terzo angolo.*

$$\text{tan mezzo angolo cercato} \begin{cases} = \textit{cot} \text{ semidifferenza angoli dati} \times \dfrac{\textit{sen}\ \frac{1}{2} \text{ differ. lati dati}}{\textit{sen}\ \frac{1}{2} \text{ somma lati dati}} \\ = \textit{cot} \text{ semisomma angoti dati} \times \dfrac{\textit{cos}\ \frac{1}{2} \text{ differ. lati dati}}{\textit{cos}\ \frac{1}{2} \text{ somma lati dati}} \end{cases}$$

---

8 Dati ... *Tre lati* ... oppure ... *Tre angoli.*

Si cerca ... *La perpendicolare abbassata dal vertice di un'angolo sul lato opposto.*

a, b, c, i lati: A, B, C, gli angoli.

Si facci $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ = semisomma dei tre lati

$S = \dfrac{A+B+C}{2}$ = semisomma dei tre angoli

$$\text{sen perpendicolare} = \frac{2\sqrt{sen\ s\ sen\ (s-a)\ sen\ (s-b)\ sen\ (s-c)}}{sen \text{ lato su cui cade la perpendicolare}}$$

$$\text{sen perpendicolare} = \frac{2\sqrt{-sen\ S\ sen(S-A)\ sen(S-B)\ sen(S-C)}}{sen \text{ angolo da cui cade la perpendicolare}}$$

Tav. XII. *Archi circolari in parti del raggio* = 1

Gradi		Gradi		Gradi	
1°	0,0174533	37°	0,6457718	73°	1,2740902
2	0,0349066	38	0,6632251	74	1,2915436
3	0,0523599	39	0,6806784	75	1,3089969
4	0,0698132	40	0,6981317	76	1,3264502
5	0,0872665	41	0,7155850	77	1,3439035
6	0,1047198	42	0,7330383	78	1,3613568
7	0,1221730	43	0,7504916	79	1,3788101
8	0,1396263	44	0,7679449	80	1,3962634
9	0,1570796	45	0,7853982	81	1,4137167
10	0,1745329	46	0,8028515	82	1,4311700
11	0,1919862	47	0,8203047	83	1,4486233
12	0,2094395	48	0,8377580	84	1,4660766
13	0,2268928	49	0,8552113	85	1,4835299
14	0,2443461	50	0,8726646	86	1,5009832
15	0,2617994	51	0,8901179	87	1,5184364
16	0,2792527	52	0,9075712	88	1,5358897
17	0,2967060	53	0,9250245	89	1,5533430
18	0,3141593	54	0,9424778	90	1,5707963
19	0,3316126	55	0,9599311	91	1,5882496
20	0,3490659	56	0,9773844	92	1,6057029
21	0,3665191	57	0,9948377	93	1,6231562
22	0,3839724	58	1,0122910	94	1,6406095
23	0,4014257	59	1,0297443	95	1,6580628
24	0,4188790	60	1,0471976	96	1,6755161
25	0,4363323	61	1,0646508	97	1,6929694
26	0,4537856	62	1,0821041	98	1,7104227
27	0,4712389	63	1,0995574	99	1,7278760
28	0,4886922	64	1,1170107	100	1,7453293
29	0,5061455	65	1,1344640	120	2,0943951
30	0,5235988	66	1,1519173	150	2,6179939
31	0,5410521	67	1,1693706	180	3,1415927
32	0,5585054	68	1,1868239	210	3,6651914
33	0,5759587	69	1,2042772	240	4,1887902
34	0,5934119	70	1,2217305	270	4,7123890
35	0,6108652	71	1,2391838	300	5,2359878
36	0,6283185	72	1,2566371	330	5,7595865
				360	6,2831853

Minuti	
1′	0,0002909
2	0,0005818
3	0,0008727
4	0,0011636
5	0,0014544
6	0,0017453
7	0,0020362
8	0,0023271
9	0,0026180
10	0,0029089
20	0,0058178
30	0,0087266
40	0,0116355
50	0,0145444
60	0,0174533

Secondi	
1″	0,0000048
2	0,0000097
3	0,0000145
4	0,0000194
5	0,0000242
6	0,0000291
7	0,0000339
8	0,0000388
9	0,0000436
10	0,0000485
20	0,0000970
30	0,0001454
40	0,0001939
50	0,0002424
60	0,0002909

TAV. XIII. *Per convertire il tempo sidereo in medio.*

Argom. Ore, minuti, e secondi di tempo Sidereo.

Ore		Minuti				Secondi			
h	′ ″	′	″	′	″	″	″	″	″
1	0. 9, 830	1	0, 164	31	5, 079	1	0, 003	31	0, 085
2	0. 19, 659	2	0, 328	32	5, 242	2	0, 005	32	0, 087
3	0. 29, 489	3	0, 491	33	5, 406	3	0, 008	33	0, 090
4	0. 39, 318	4	0, 655	34	5, 570	4	0, 011	34	0, 093
5	0. 49, 148	5	0, 819	35	5, 734	5	0, 014	35	0, 096
6	0. 58, 977	6	0, 983	36	5, 898	6	0, 016	36	0, 098
7	1. 8, 807	7	1, 147	37	6, 062	7	0, 019	37	0, 101
8	1. 18, 636	8	1, 311	38	6, 225	8	0, 022	38	0, 104
9	1. 28, 466	9	1, 474	39	6, 389	9	0, 025	39	0, 106
10	1. 38, 296	10	1, 638	40	6, 553	10	0, 027	40	0, 109
11	1. 48, 125	11	1, 802	41	6, 717	11	0, 030	41	0, 112
12	1. 57, 955	12	1, 966	42	6, 881	12	0, 033	42	0, 115
13	2. 7, 784	13	2, 130	43	7, 044	13	0, 036	43	0, 118
14	2. 17, 614	14	2, 294	44	7, 208	14	0, 038	44	0, 120
15	2. 27, 443	15	2, 457	45	7, 372	15	0, 041	45	0, 123
16	2. 37, 273	16	2, 621	46	7, 536	16	0, 044	46	0, 126
17	2. 47, 103	17	2, 785	47	7, 700	17	0, 047	47	0, 128
18	2. 56, 932	18	2, 949	48	7, 864	18	0, 049	48	0, 131
19	3. 6, 762	19	3, 113	49	8, 027	19	0, 052	49	0, 134
20	3. 16, 591	20	3, 277	50	8, 191	20	0, 055	50	0, 137
21	3. 26, 421	21	3, 440	51	8, 355	21	0, 057	51	0, 140
22	3. 36, 250	22	3, 604	52	8, 519	22	0, 060	52	0, 142
23	3. 46, 080	23	3, 768	53	8, 683	23	0, 063	53	0, 145
24	3. 55, 909	24	3, 932	54	8, 847	24	0, 066	54	0, 148
		25	4, 096	55	9, 010	25	0, 068	55	0, 150
		26	4, 259	56	9, 174	26	0, 071	56	0, 153
		27	4, 423	57	9, 338	27	0, 074	57	0, 156
		28	4, 587	58	9, 502	28	0, 076	58	0, 159
		29	4, 751	59	9, 666	29	0, 079	59	0, 161
		30	4, 915	60	9, 830	30	0, 082	60	0, 164

Dal tempo sidereo dato si sottragga la riduzione trovata con la tavola.

TAV. XIV. *Per convertire il tempo medio in sidereo.*

Argom. Ore, minuti, e secondi di tempo medio.

Ore		Minuti				Secondi			
h	' "	'	"	'	"	"	"	"	"
1	0. 9, 856	1	0, 164	31	5, 092	1	0, 003	31	0, 085
2	0. 19, 713	2	0, 329	32	5, 257	2	0, 005	32	0, 087
3	0. 29, 569	3	0, 493	33	5, 421	3	0, 008	33	0, 090
4	0. 39, 426	4	0, 657	34	5, 585	4	0, 011	34	0, 093
5	0. 49, 282	5	0, 821	35	5, 750	5	0, 014	35	0, 096
6	0. 59, 139	6	0, 986	36	5, 914	6	0, 016	36	0, 098
7	1. 8, 995	7	1, 150	37	6, 078	7	0, 019	37	0, 101
8	1. 18, 852	8	1, 314	38	6, 242	8	0, 022	38	0, 104
9	1. 28, 708	9	1, 478	39	6, 407	9	0, 025	39	0, 106
10	1. 38, 565	10	1, 643	40	6, 571	10	0, 027	40	0, 109
11	1. 48, 421	11	1, 807	41	6, 735	11	0, 030	41	0, 112
12	1. 58, 278	12	1, 971	42	6, 900	12	0, 033	42	0, 115
13	2. 8, 134	13	2, 136	43	7, 064	13	0, 036	43	0, 118
14	2. 17, 991	14	2, 300	44	7, 228	14	0, 038	44	0, 120
15	2. 27, 847	15	2, 464	45	7, 392	15	0, 041	45	0, 123
16	2. 37, 704	16	2, 628	46	7, 557	16	0, 044	46	0, 126
17	2. 47, 560	17	2, 793	47	7, 721	17	0, 047	47	0, 128
18	2. 57, 416	18	2, 957	48	7, 885	18	0, 049	48	0, 131
19	3. 7, 273	19	3, 121	49	8, 050	19	0, 052	49	0, 134
20	3. 17, 129	20	3, 285	50	8, 214	20	0, 055	50	0, 137
21	3. 26, 986	21	3, 450	51	8, 378	21	0, 057	51	0, 140
22	3. 36, 842	22	3, 614	52	8, 542	22	0, 060	52	0, 142
23	3. 46, 699	23	3, 778	53	8, 707	23	0, 063	53	0, 145
24	3. 56, 555	24	3, 943	54	8, 871	24	0, 066	54	0, 148
		25	4, 107	55	9, 035	25	0, 068	55	0, 150
		26	4, 271	56	9, 199	26	0, 071	56	0, 153
		27	4, 436	57	9, 364	27	0, 074	57	0, 156
		28	4, 600	58	9, 528	28	0, 076	58	0, 159
		29	4, 764	59	9, 692	29	0, 079	59	0, 161
		30	4, 928	60	9, 856	30	0, 082	60	0, 164

Al tempo medio dato si aggiunga la riduzione trovata colla tavola.

Tav. XV. Fattori *per la deviazione azimutale dello stromento dei Passaggi.*

Argom. Declinazione, e Distanza dell'astro dallo Zenit.

Declinazione	Distanza dall'astro dallo Zenit									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0. 0	0	0,174	0,342	0,500	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1,000
10. 0	0	0,176	0,347	0,508	0,653	0,778	0,879	0,954	1,000	1,015
20. 0	0	0,185	0,364	0,532	0,684	0,815	0,922	1,000	1,048	1,064
30. 0	0	0,201	0.395	0,577	0,742	0,885	1,000	1,085	1,137	1,155
40. 0	0	0,227	0,446	0,653	0,839	1,000	1,131	1,227	1,286	1,305
50. 0	0	0,270	0,532	0,778	1,000	1,192	1,347	1,462	1,532	1,556
60. 0	0	0,347	0,684	1,000	1,286	1,532	1,732	1,879	1,970	2,000
70. 0	0	0,508	1,000	1,462	1,879	2,240	2,532	2,747	2,879	2,924
75. 0	0	0,671	1,321	1,936	2,484	2,960	3,346	3,631	3,805	3,864
80. 0	0	1,000	1,970	2,879	3,702	4,411	4,987	5,411	5,671	5,759
81. 0	0	1,110	2,186	3,196	4,109	4,897	5,536	6,007	6,295	6,392
82. 0	0	1,248	2,458	3,593	4,619	5,504	6,223	6,752	7,076	7,185
82.30	0	1,330	2,620	3,831	4,925	5,869	6,635	7,199	7,545	7,661
83. 0	0	1,425	2,806	4,103	5,274	6,286	7,106	7,711	8,081	8,206
83.30	0	1,534	3,021	4,417	5,678	6,767	7,650	8,301	8,699	8,834
84. 0	0	1,661	3,272	4,783	6,149	7,329	8,285	8,990	9,421	9,567
84.30	0	1,812	3,568	5,217	6,706	7,992	9,036	9,804	10,275	10,434
85. 0	0	1,992	3,924	5,737	7,375	8,789	9,937	10,782	11,299	11,500
85.30	0	2,213	4,359	6,373	8,193	9,763	11,038	11,977	12,552	12,745
86. 0	0	2,489	4,903	7,168	9,215	10,982	12,414	13,471	14,118	14,335
86.20	0	2,715	5,348	7,818	10,051	11,279	13,542	14,694	15,399	15,637
86.40	0	2,987	5,882	8,599	11,055	13,175	14,894	16,161	16,937	17,198
87. 0	0	3,318	6,535	9,554	12,282	14,637	16,548	17,955	18,817	19,107
87.20	0	3,732	7,351	10,747	13,816	16,465	18,614	20,198	21,167	21,494
87.40	0	4,265	8,401	12,281	15,788	18,816	21,271	23,081	24,189	24,562
88. 0	0	4,976	9,800	14,327	18,418	21,950	24,815	26,926	28,218	28,654
88.10	0	5,428	10,690	15,629	20,092	23,945	27,070	29,373	30,783	31,258
88.20	0	5,970	11,759	17,191	22,101	26,338	29,776	32,309	33,860	34,382
88.30	0	6,634	13,066	19,101	24,556	29,264	33,084	35,898	37,621	38,202
88.40	0	7,463	14,699	21,488	27,624	32,921	37,218	40,384	42,323	42,976
88.50	0	8,529	16,798	24,557	31,570	37,623	42,534	46,152	48,368	49,114
89. 0	0	9,950	19,597	28,649	36,831	43,983	49,622	53,843	56,828	57,299

Per le stelle tra il Zenit e il Polo il *fattore* è negativo.
Sotto il Polo ritorna positivo come al Sud del Zenit.

Tav. XVI. *Corrispondenza dei giorni colla Longitudine, semidiametri, e moti orarii del Sole.*

Giorni dell' anno		Long. vera del ☉		Semidiam. del Sole		Moto orario	
				in arco	in tem. m.	in AR	in Decl.
		s	°	′ ″	′ ″	′ ″	″
Gennajo	1	IX.	10	16. 17,8	1. 10,8	2. 45,76	11,49
	11		20	16. 17,5	10,3	43,03	22,44
	20	X.	0	16. 16,8	9,4	38,89	32,36
	30		10	16. 15,5	8,3	33,98	40,91
Febbrajo	9		20	16. 13,8	7,2	28,95	47,88
	19	XI.	0	16. 11,7	6,1	24,32	53,17
Marzo	1		10	16. 9,3	5,2	20,57	56,80
	11		20	16. 6,7	4,6	17,91	58,81
	21	O.	0	16. 3,9	4,3	16,46	59,23
	31		10	16. 1,1	4,2	16,32	58,13
Aprile	10		20	15. 58,3	4,5	17,44	55,53
	20	I.	0	15. 55,6	5,0	19,65	51,45
	30		10	15. 53,2	5,8	22,77	45,89
Maggio	11		20	15. 51,0	6,6	26,38	38,89
	21	II.	0	15. 49,1	7,4	30,06	30,57
Giugno	1		10	15. 47,5	8,1	33,21	21,09
	11		20	15. 46,4	8,5	35,30	10,77
	21	III.	0	15. 45,7	8,7	35,95	0,00
Luglio	2		10	15. 45,5	8,5	34,99	10,75
	12		20	15. 45,7	8,0	32,61	21,01
	23	IV.	0	15. 46,4	7,2	29,17	30,39
Agosto	2		10	15. 47,5	6,3	25,27	38,60
	13		20	15. 49,1	5,5	21,48	45,47
	23	V.	0	15. 51,0	4,7	18,22	50,92
Settembre	3		10	15. 53,2	4,1	15,94	54,92
	13		20	15. 55,6	3,8	14,77	57,47
	23	VI.	0	15. 58,3	3,9	14,89	58,55
Ottobre	3		10	16. 1,1	4,2	16,33	58,13
	13		20	16. 3,9	4,9	19,05	56,18
	23	VII.	0	16. 6,7	5,8	22,88	52,64
Novembre	2		10	16. 9,3	6,9	27,64	47,45
	12		20	16. 11,7	8,1	32,84	40,61
	22	VIII.	0	16. 13,8	9,2	37,98	32,18
Dicembre	2		10	16. 15,5	10,1	42,39	22,35
	12		20	16. 16,7	10,8	45,43	11,47
	22	IX.	0	16. 17,5	11,0	46,61	0,00
Gennajo	1		10	16. 17,8	10,8	45,76	11,49

Aggiungendo 0″ 2 al semidiametro in tempo medio dato dalla tavola si ha il semidiametro in tempo sidereo.

Tavole per ridurre al meridiano le vicine distanze dal Zenit osservate nella parte opposta al polo elevato.

Tav. XVII.

Angolo orario in tempo	Riduzione
4″	0,009″
8	0,035
12	0,078
16	0,140
20	0,218
24	0,314
28	0,428
32	0,558
36	0,705
40	0,873
44	1,032
48	1,257
52	1,475
56	1,710
1′.0	1,963
1. 4	2,234
1. 8	2,522
1.12	2,827
1.16	3,150
1.20	3,491
1.24	3,848
1.28	4,224
1.32	4,616
1.36	5,026
1.40	5,454
1.44	5,899
1.48	6,362
1.52	6,842
1.56	7,339
2. 0	7,854
3. 0	17,671
4. 0	31,416
5. 0	49,087

Tav. XVIII. *Fattore della riduzione.*

Argom. Distanza dal Zenit, e Altezza del Polo.

Dist. dal Zenit	Altezza del Polo						Palermo
° ′	0	20	30	40	50	60	38.6.44
0. 5	687,55	607,44	516,09	403,96	284,57	172,32	426,13
0.10	343,77	303,88	258,86	202,23	142,53	86,38	213,30
0.15	229,18	202,23	172,32	134,98	95,18	57,73	142,36
0.20	171,89	152,10	129,35	101,36	71,51	43,40	106,89
0.25	137,51	121,74	103,56	81,18	57,31	34,81	85,61
0.30	114,59	101,51	86,37	67,74	47,84	29,08	71,42
0.40	85,94	76,21	64,89	50,92	36,00	21,90	53,69
0.50	68,75	61,03	53,00	40,84	28,90	17,62	43,05
1. 0	57,29	50,91	43,40	34,11	24,16	14,76	35,95
1.30	38,20	34,04	29,07	22,90	16,27	9,98	24,13
2. 0	28,64	25,61	21,96	17,30	12,32	7,59	18,21
2.30	22,90	20,55	17,61	13,93	9,73	6,16	14,66
3. 0	19,08	17,17	14,74	11,69	8,38	5,20	12,30
3.30	16,39	14,76	12,69	10,09	7,25	4,52	10,61
4. 0	14,30	12,95	11,16	8,88	6,40	4,01	9,34
4.30	12,71	11,54	9,96	7,95	5,74	3,61	8,35
5. 0	11,17	10,41	9,01	7,20	5,21	3,29	7,56
6. 0	9,51	8,72	7,57	6,08	4,42	2,81	6,38
7. 0	8,14	7,51	6,54	5,27	3,86	2,47	5,53
8. 0	7,11	6,60	5,71	4,67	3,43	2,21	4,89
9. 0	6,31	5,92	5,17	4,20	3,10	2,01	4,39
10. 0	5,67	5,33	4,69	3,82	2,84	1,85	4,00
15. 0	3,73	3,62	3,23	2,68	2,03	1,37	2,80
20. 0	2,75	2,75	2,49	2,10	1,63	1,12	2,19
30. 0	1,73	1,85	1,73	1,51	1,21	0,87	1,56
40. 0	1,19	1,37	1,33	1,19	0,98	0,73	1,22
50. 0	0,84	1,06	1,06	0,98	0,84	0,64	1,00
60. 0	0,58	0,83	0,87	0,83	0,73	0,58	0,84
70. 0	0,36	0,64	0,71	0,71	0,64	0,52	0,71
80. 0	0,18	0,48	0,57	0,60	0,57	0,48	0,59
90. 0	0, 0	0,32	0,43	0,49	0,49	0,43	0,49

Il prodotto della *riduzione* data dalla Tav. XVII per il *fattore* dato dalla Tav. XVIII si sottragga dalla Distanza osservata dal Zenit.

Tavole per ridurre al meridiano le vicine distanze dal Zenit osservate verso il Polo elevato.

Tav. XVII.

Angolo orario in tempo	Riduzione
4″	0″,009
8	0,035
12	0,078
16	0,140
20	0,218
24	0,314
28	0,428
32	0,558
36	0,705
40	0,873
44	1,032
48	1,257
52	1,475
56	1,710
1′.0	1,963
1. 4	2,234
1. 8	2,522
1.12	2,827
1.16	3,150
1.20	3,491
1.24	3,848
1.28	4,224
1.32	4,616
1.36	5,026
1.40	5,454
1.44	5,899
1.48	6,362
1.52	6,842
1.56	7,339
2. 0	7,854
3. 0	17,671
4. 0	31,416
5. 0	49,087

Tav. XIX. *Fattore della riduzione.*

Argom. Distanza dal Zenit, e Altezza del Polo.

Dist dal Zenit	Altezza del Polo						Palermo
	0	20	30	40	50	60	38.6.44
0°. 5′	687,55	606,80	515,23	402,88	283,59	171,49	425,14
0.10	343,77	303,24	257,40	200,24	141,56	85,51	212,34
0.15	229,18	202,05	171,45	134,00	94,20	56,86	141,39
0.20	171,88	151,46	028,48	100,37	70,53	42,54	105,92
0.25	137,51	121,10	112,70	80,20	56,32	33,94	84,64
0.30	114,59	100,86	85,51	66,75	46,85	28,21	70,45
0.40	85,94	75,57	64,02	49,82	35,02	21,05	52,73
0.50	68,75	60,39	51,13	39,85	27,91	16,76	42,07
1. 0	57,29	58,27	42,54	33,13	23,18	13,89	31,98
1.30	38,20	33,32	28,21	21,92	15,29	9,11	23,15
2. 0	28,64	24,96	21,04	16,31	11,34	6,73	17,24
2.30	22,90	19,90	16,74	12,95	8,97	5,29	13,69
3. 0	19,08	16,53	13,93	10,71	7,39	4,34	11,33
3.30	16,39	14,12	11,83	9,10	6,26	3,65	9,64
4. 0	14,30	12,31	10,29	7,90	5,42	3,14	8,37
4.30	12,71	10,90	9,10	6,96	4,76	2,74	7,38
5. 0	11,17	9,77	8,14	6,22	4,23	2,42	6,59
6. 0	9,51	8,08	6,70	5,09	3,44	1,95	5,49
7. 0	8,14	6,87	5,67	4,29	2,87	1,57	4,56
8. 0	7,11	5,96	4,90	3,68	2,45	1,35	3,92
9. 0	6,31	5,25	4,30	3,21	2,12	1,14	3,42
10. 0	5,67	4,69	3,82	2,84	1,85	0,98	3,02
15. 0	3,73	2,97	2,37	1,70	1,05	0,50	1,82
20. 0	2,75	2,11	1,63	1,12	0,64	0,25	1,22
30. 0	1,73	1,21	0,87	0,52	0,22	0,00	0,59
40. 0	1,19	0,73	0,46	0,21	0,00	−0,13	0,25
50. 0	0,84	0,42	0,20	0,00	−0,15	−0,22	0,03
60. 0	0,58	0,19	0,00	−0,15	−0,25	−0,29	−0,13
70. 0	0,36	0,00	−0,16	−0,28	−0,34	−0,34	−0,26
80. 0	0,18	−0,17	−0,30	−0,39	−0,42	−0,39	−0,38
90. 0	0, 0	−0,32	−0,43	−0,49	−0,49	−0,43	−0,49

Il prodotto della *riduzione* della Tav. XVII per il *fattore* della Tav. XIX si sottragga dalle Distanze dal Zenit osservate sopra il Polo; si aggiunga a quelle osservate sotto.

Tav. XX. *Rifrazioni medie.*

Argom. Distanza osservata dal' Zenit.

Distanza dallo Zenit	Rifrazione media	Differenza per 1°	Distanza dallo Zenit	Rifrazione media	Differenza per 1°	Distanza dallo Zenit	Rifrazione media	Differenza per 10′
°	′ ″	″	°	′ ″	″	° ′	′ ″	″
1	0. 1,02	1,02	33	0.37,93	1,46	65. 0	2. 4,65	0,97
2	0. 2,04	1,02	34	0.39,39	1,50	66. 0	2.10,48	1,05
3	0. 3,06	1,02	35	0.40,89	1,53	67. 0	2.16,78	1,14
4	0. 4,08	1,03	36	0.42,42	1,58	68. 0	2.23,61	1,24
5	0. 5,11	1,03	37	0.44,00	1,61	69. 0	2.31,04	1,35
6	0. 6,14	1,03	38	0.45,61	1,66	70. 0	2.39,16	1,43
7	0. 7,17	1,04	39	0.47,27	1,72	10	2.40,59	1,45
8	0. 8,21	1,04	40	0.48,99	1,76	20	2.42,04	1,48
9	0. 9,25	1,05	41	0.50,75	1,82	30	2.43,52	1,50
10	0.10,30	1,05	42	0.52,57	1,86	40	2.45,02	1,51
11	0.11,35	1,06	43	0.54,43	1,92	50	2.46,53	1,55
12	0.12,41	1,07	44	0.56,35	2,01	71. 0	2.48,08	1,57
13	0.13,48	1,08	45	0.58,56	2,07	10	2.49,65	1,60
14	0.14,56	1,09	46	1. 0,43	2,14	20	2.51,25	1,62
15	0.15,65	1,10	47	1. 2,57	2,23	30	2.52,87	1,66
16	0.16,75	1,11	48	1. 4,80	2,31	40	2.54,53	1,68
17	0.17,86	1,12	49	1. 7,11	2,41	50	2.56,21	1,71
18	0.18,98	1,13	50	1. 9,52	2,50	72. 0	2.57,92	1,74
19	0.20,11	1,15	51	1.12,02	2,62	10	2.59,66	1,77
20	0.21,26	1,16	52	1.14,64	2,74	20	3. 1,43	1,80
21	0.22,42	1,18	53	1.17,38	2,86	30	3. 3,23	1,83
22	0.23,60	1,20	54	1.20,24	3,01	40	3. 5,06	1,87
23	0.24,80	1,21	55	1.23,25	3,16	50	3. 6,93	1,90
24	0.26,01	1,23	56	1.26,41	3,32	73. 0	3. 8,83	1,94
25	0.27,24	1,25	57	1.29,73	3,50	10	3.10,77	1,97
26	0.28,49	1,27	58	1.33,23	3,70	20	3.12,74	2,01
27	0.29,76	1,29	59	1.36,93	3,92	30	3.14,75	2,05
28	0.31,05	1,33	60	1.40,85	4,16	40	3.16,80	2,08
29	0.32,38	1,34	61	1.45,01	4,43	50	3.18,88	2,13
30	0.33,72	1,37	62	1.49,44	4,73	74. 0	3.21,01	2,17
31	0.35,09	1,40	63	1.54,17	5,05	10	3.23,18	2,21
32	0.36,49	1,44	64	1.59,22	5,43	20	3.25,39	2,27
33	0.37,93		65	2. 4,65		30	3.27,66	

Tav. XX. cont. *Rifrazioni medie.*

Argom. Distanza osservata dal Zenit.

Distanza dallo Zenit	Rifrazione media	Differenza per 10′	Distanza dallo Zenit	Rifrazione media	Differ. per 10′	Distanza dallo Zenit	Rifrazione media	Differenza per 10′
74° 30′	3′ 27″,66	2″,29	79° 50′	5′ 15″,16	5″,93	85° 10′	10′ 10″,35	17″,38
40	3.29,95	2,35	80. 0	5.20,19	5,17	20	10.27,73	18,30
50	3.32,30	2,40	10	5.25,36	5,34	30	10.46,03	19,27
75. 0	3.34,70	2,46	20	5.30,70	5,50	40	11. 5,30	20,36
10	3.37,16	2,49	30	5.36,20	5,68	50	11.25,66	21,49
20	3.39,65	2,56	40	5.41,88	5,86	86. 0	11.47,15	22,73
30	3.42,21	2,61	50	5.47,74	6,05	10	12. 9,88	24,09
40	3.44,82	2,66	81. 0	5.53,79	6,25	20	12.33,97	25,54
50	3.47,48	2,73	10	6. 0,04	6,46	30	12.59,51	27,10
76. 0	3.50,21	2,79	20	6. 6,50	6,68	40	13.26,61	28,79
10	3.53,00	2,85	30	6.13,18	6,91	50	13.55,40	30,64
20	3.55,85	2,91	40	6.20,09	7,17	87. 0	14.26,04	32,67
30	3.58,76	2,98	50	6.27,26	7,42	10	14.58,71	34,89
40	4. 1,74	3,05	82. 0	6.34,68	7,69	20	15.33,60	37,29
50	4. 4,79	3,12	10	6.42,37	7,96	30	16.10,89	39,91
77. 0	4. 7,91	3,20	20	6.50,33	8,26	40	16.50,80	42,80
10	4.11,11	3,28	30	6.58,59	8,60	50	17.33,60	46, 0
20	4.14,39	3,35	40	7. 7,19	8,94	88. 0	18.19, 6	49, 4
30	4.17,74	3,45	50	7.16,13	9,27	10	19. 8, 0	53, 2
40	4.21,19	3,53	83. 0	7.25,40	9,65	20	20. 2, 2	57, 4
50	4.24,72	3,61	10	7.35,05	10,05	30	20.59, 6	62, 1
78. 0	4.28,33	3,71	20	7.45,10	16,48	40	22. 1, 7	67, 2
10	4.32,04	3,80	30	7.55,58	10,92	56	23. 8, 9	71, 9
20	4.35,84	3,91	40	8. 6,50	11,40	89. 0	24.21, 6	79, 1
30	4.39,75	4,01	50	8.17,90	11,90	10	25.40, 9	86, 2
40	4.43,76	4,12	84. 0	8.29,80	12,44	20	27. 7, 1	93, 7
50	4.47,88	4,24	10	8.42,24	13,01	30	28.40, 8	102, 4
79. 0	4.52,12	4,35	20	8.55,25	13,63	40	30.23, 0	111, 8
10	4.56,47	4,47	30	9. 8,88	14,28	50	32.15, 0	122, 5
20	5. 0,94	4,60	40	9.23,16	14,96	90. 0	34.47, 5	135, 6
30	5. 5,54	4,74	50	9.38,12	15,72	10	36.32, 5	149, 8
40	5.10,28	4,88	85. 0	9.53,84	16,51	20	39. 2, 3	167, 6
50	5.15,16		10	10.10,35		30	41.49, 9	

Tav. XXII. *Fattori della rifrazione media per ridurla in vera, espressi dalla loro differenza coll'unità.*

Barometro in pollici inglesi	Termometro di Fahrenheit									
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
28,4	+0,012	-0,011	-0,033	-0,054	-0,073	-0,093	-0,112	-0,130	-0,147	-0,164
28,5	+0,016	-0,007	-0,029	-0,050	-0,070	-0,090	-0,109	-0,127	-0,144	-0,161
28,6	+0,020	-0,003	-0,025	-0,046	-0,067	-0,087	-0,106	-0,124	-0,141	-0,158
28,7	+0,024	+0,001	-0,022	-0,043	-0,064	-0,084	-0,103	-0,120	-0,138	-0,155
28,8	+0,027	+0,004	-0,018	-0,039	-0,060	-0,081	-0,100	-0,117	-0,135	-0,152
28,9	+0,031	+0,008	-0,015	-0,036	-0,057	-0,077	-0,096	-0,113	-0,131	-0,149
29,0	+0,035	+0,012	-0,011	-0,033	-0,054	-0,074	-0,093	-0,110	-0,128	-0,146
29,1	+0,038	+0,015	-0,008	-0,030	-0,051	-0,071	-0,090	-0,107	-0,125	-0,143
29,2	+0,042	+0,018	-0,005	-0,027	-0,048	-0,068	-0,087	-0,104	-0,122	-0,140
29,3	+0,045	+0,022	-0,002	-0,023	-0,044	-0,065	-0,084	-0,101	-0,120	-0,137
29,4	+0,049	+0,025	+0,002	-0,020	-0,041	-0,061	-0,080	-0,099	-0,117	-0,134
29,5	+0,052	+0,028	+0,005	-0,017	-0,038	-0,058	-0,077	-0,096	-0,114	-0,131
29,6	+0,056	+0,032	+0,008	-0,014	-0,035	-0,055	-0,074	-0,093	-0,111	-0,128
29,7	+0,059	+0,035	+0,012	-0,010	-0,032	-0,052	-0,071	-0,090	-0,108	-0,125
29,8	+0,063	+0,039	+0,015	-0,007	-0,028	-0,049	-0,068	-0,087	-0,105	-0,122
29,9	+0,066	+0,042	+0,019	-0,003	-0,024	-0,045	-0,065	-0,084	-0,162	-0,119
30,0	+0,070	+0,046	+0,022	+0,000	-0,021	-0,042	-0,062	-0,081	-0,199	-0,116
30,1	+0,074	+0,049	+0,025	+0,003	-0,018	-0,039	-0,059	-0,078	-0,096	-0,113
30,2	+0,077	+0,053	+0,029	+0,007	-0,015	-0,036	-0,056	-0,075	-0,093	-0,110
30,3	+0,081	+0,056	+0,032	+0,010	-0,011	-0,033	-0,053	-0,072	-0,090	-0,108
30,4	+0,084	+0,060	+0,036	+0,014	-0,008	-0,029	-0,050	-0,068	-0,087	-0,105
30,5	+0,088	+0,063	+0,039	+0,017	-0,005	-0,026	-0,046	-0,065	-0,084	-0,102
30,6	+0,092	+0,066	+0,042	+0,020	-0,002	-0,023	-0,043	-0,062	-0,081	-0,099
30,7	+0,095	+0,070	+0,046	+0,023	+0,001	-0,020	-0,040	-0,059	-0,078	-0,096
30,8	+0,099	+0,073	+0,049	+0,027	+0,005	-0,017	-0,037	-0,056	-0,075	-0,093
30,9	+0,102	+0,077	+0,053	+0,030	+0,008	-0,013	-0,033	-0,053	-0,072	-0,090
31,0	+0,106	+0,080	+0,056	+0,033	+0,011	-0,010	-0,030	-0,050	-0,069	-0,084

Si riducono gli altri barometri a pollici e decimali del *barometro inglese* come siegue.

1. Si dividano le *linee* del barometro francese per 12, il quale restando così espresso in pollici e decimali si moltiplichi pel num.° 1,065825, il cui log. è 1.4444059.

2. Si moltiplichino li *millimetri* in cui è espresso il barometro metrico per 39,37079, il cui log. è 1.5951742.

Si riducono le altre scale termometriche a quella di *Fahrenheit*, come siegue:

1. Li gradi del termometro di *Reaumur* si moltiplichino per $\frac{9}{4}$, o per 2,25; e si aggiungano 32 al prodotto.

2. Li gradi del term. *centigrado* si moltiplichino per $\frac{9}{5}$, o per 1,8; e si aggiungano 32 al prodotto.

Tav. XXI. *Correzione delle basse rifrazioni.*

T = Termometro
B = Barometro

Dist. dal Zenit	Secondi di arco da moltipl. per T–50	B–30
° ′	″	
76. 0	–0,012	
78. 0	–0,018	″
80. 0	–0,030	+0,04
82. 0	–0,053	+0,08
82.30	–0,063	+0,10
83. 0	–0,074	+0,11
83,30	–0,089	+0,13
84. 0	–0,107	+0,16
84.30	–0,130	+0,20
85. 0	–0,159	+0,25
85.30	–0,198	+0,31
86. 0	–0,248	+0,39
86.30	–0,317	+0,51
87. 0	–0,410	+0,68
87.10	–0,448	+0,75
87.20	–0,490	+0,83
87.30	–0,538	+0,91
87.40	–0,593	+1,01
87.50	–0,654	+1,13
88. 0	–0,722	+1,26
88.10	–0,799	+1,41
88.20	–0,887	+1,59
88.30	–0,987	+1,79
88.40	–1,101	+2,02
88.50	–1,231	+2,29
89. 0	–1,386	+2,61
89.10	–1,551	+2,98
89.20	–1,749	+3,41
89.30	–1,977	+3,93
89.40	–2,241	+4,54
89.50	–2,549	+5,26
90. 0	–2,909	+6,12
90.10	–3,330	+7,12
90.20	–3,823	+8,31
90.30	–4,402	+9,72

Tav. XXIII. *Parallasse del* ☉

Argom. Distanza dal Zenit.

Dis. del Zenit	Genn.	Febb. Dicem.	Marzo Nov.	Aprile Ottob.	Maggio Settem.	Giugno Agosto	Luglio
°	″	″	″	″	″	″	″
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,76	0,76	0,76	0,75	0,74	0,74	0,74
10	1,52	1,52	1,51	1,49	1,48	1,47	1,47
15	2,26	2,26	2,25	2,23	2,21	2,19	2,19
20	2,99	2,98	2,97	2,94	2,92	2,90	2,89
25	3,70	3,69	3,67	3,64	3,60	3,58	3,57
30	4,37	4,36	4,34	4,30	4,26	4,24	4,23
35	5,02	5,01	4,98	4,93	4,89	4,86	4,85
40	5,62	5,61	5,68	5,53	5,48	5,45	5,44
45	6,19	6,17	6,13	6,08	6,03	5,99	5,98
50	6,70	6,68	6,64	6,59	6,53	6,49	6,48
55	7,17	7,15	7,11	7,04	6,99	6,94	6,93
60	7,58	7,56	7,51	7,45	7,39	7,34	7,33
65	7,93	7,91	7,86	7,79	7,73	7,68	7,67
70	8,22	8,20	8,15	8,08	8,01	7,97	7,95
75	8,45	8,43	8,38	8,30	8,24	8,19	8,17
80	8,62	8,59	8,54	8,47	8,40	8,35	8,33
85	8,73	8,69	8,64	8,56	8,50	8,44	8,42
90	8,75	8,73	8,67	8,60	8,53	8,48	8,46

Tav. XXVI. *Obbliquità media dell' Ecclittica, e suo annuo decremento.*

Epoche	Obbliq. media	Per anni	Decremento annuo
anni	23°.27′.		″
1800	55,74	1	0,455
1810	51,19	2	0,910
1820	46,64	3	1,364
1830	42,09	4	1,819
1840	37,55	5	2,274
1850	33,00	6	2,729
1860	28,45	7	3,184
1870	23,90	8	3,638
1880	19,35	9	4,093
1890	14,81	10	4,548
1900	10,26		

Tav. XXIV. *Nutazione Lunare per l'obbl. dell' Ecclitt.*

Arg. Long. del Nodo Lunare.

Long. ☊	Nutaz.	Long. ☊
s s	″	s s
O. o VI	+9,36–	XII. o VI
10	+9,21–	20
20	+8,79–	10
I. o VII	+8,10–	XI. o V
10	+7,15–	20
20	+6,01–	10
II. o VIII	+4,68–	X. o IV
10	+3,19–	20
20	+1,62–	10
III. o IX.	+0,00–	IX. o III

Tav. XXV. *Nutazione Solare per l' obbliquità dell' Ecclittica.*

Argom. Longitudine del Sole.

Long. ☉	Nutaz.	Long. ☉
s s	″	s s
O. o III	+0,43–	VI. o IX
15	+0,38–	15
I. o IV	+0,22–	VII. o X
15	0,00	15
II. o V	–0,22+	VIII. o XI
15	–0,38+	15
III. o VI	–0,43+	IX. o XII

Tav: XXVII. *Per ridurre il tempo in decimali del l'anno.*

Giorni del mese	Dec. dell'anno comun.	Dec. dell'anno bisest.
o Gennajo	0,0000	0,0000
o Febbrajo	0,0849	0,0847
o Marzo	0,1616	0,1639
o Aprile	0,2496	0,2486
o Maggio	0,3288	0,3303
o Giugno	0,4137	0,4153
o Luglio	0,4959	0,4973
o Agosto	0,5808	0,5820
o Settem.	0,6658	0,6667
o Ottobre	0,7479	0,7484
o Novem.	0,8329	0,8333
o Dicemb.	0,9151	0,9153

Per giorni	Decimali dell' anno
1	0,0027
2	0,0055
3	0,0082
4	0,0110
5	0,0137
6	0,0164
7	0,0192
8	0,0219
9	0,0247
10	0,0274
20	0,0548
30	0,0822
31	0,0849
Per ore 1	0,0001
2	0,0002
3	0,0003
6	0,0007
9	0,0019
12	0,0014
15	0,0017
18	0,0021
21	0,0024
24	0,0027

Tav. XXVIII. *Per ridurre il tempo in* giorni *dell'anno, e decimali di* giorno.

Giorni del mese	Gio. dell'anno comun	Gio. dell'anno bisest.
o Gennaio	0	0
o Febbraio	31	31
o Marzo	59	60
o Aprile	90	91
o Maggio	120	121
o Giugno	151	152
o Luglio	181	182
o Agosto	212	213
o Settem.	243	244
o Ottobre	273	274
o Novem.	304	305
o Dicemb.	334	335

Ore	Giorni
1	0,0416:
2	0,0833:
3	0,1250:
4	0,1666:
5	0,2083:
6	0,2500:
7	0,2916:
8	0,3333:
9	0,3750:
10	0,4166:
11	0,4583:
12	0,5000:
13	0,5416:
14	0,5833:
15	0,6250:
16	0,6666:
17	0,7083:
18	0,7500:
19	0,7916:
20	0,8333:
21	0,8750:
22	0,9166:
23	0,9583:
24	1,0000:

Min.	Giorni
1′	0,00069
2	0,00138:
3	0,00208
4	0,00277:
5	0,00347
6	0,00416:
7	0,00486
8	0,00555:
9	0,00625
10	0,00694:
20	0,01388:
30	0,02083:
40	0,02777:
50	0,03472:
60	0,04166:

Sec.	Giorni
1″	0,00001
2	0,00002
3	0,00003
4	0,00005
5	0,00006
6	0,00007
7	0,00008
8	0,00009
9	0,00010
10	0,00012
20	0,00023
30	0,00035
40	0,00046
50	0,00058
60	0,00069

Tav. XXIX. *Per ridurre il tempo in decimali di ora.*

Min.	Ore
1′	0,01666:
2	0,03333:
3	0,05
4	0,06666:
5	0,08333:
6	0,1
7	0,11666:
8	0,13333:
9	0,15
10	0,16666:
20	0,33333:
30	0,5
40	0,66666:
50	0,83333:
60	1,0

Sec.	Ore
1″	0,00027:
2	0,00055:
3	0,00083:
4	0,00111:
5	0,00138:
6	0,00166:
7	0,00194:
8	0,00222:
9	0,00250:
10	0,00277:
20	0,00555:
30	0,00833:
40	0,01111:
50	0,01388:
60	0,01666:

Li due punti all'ultima cifra ne indicano la replica all'infinito.

Tav. XXX. *Argomenti per calcolare la* latitudine *del* ☉.

Argomenti	A	B	C	D
Costanti	975	439½	317	27,2
Epoche				
C 1750	149	113	114	20,2
C 1800	148	362	41	22,8
B 1820	626	198	262	6,7
B 1840	129	33	67	18,8
B 1860	606	309	288	3,8
B 1880	109	145	92	15,9
C 1900	587	420	312	0,8

Moto degli argomenti per anni	A	B	C	D
1	365	365	365	11,2
2	730	291	315	22,5
3	120	217	264	6,5
B 4	485	142	212	17,8
5	851	68	161	2,8
6	241	433	109	14,0
7	606	359	58	25,3
B 8	971	285	5	9,3
9	361	211	371	21,5
10	727	137	319	5,6
11	117	63	268	16,8
B 12	482	428	216	0,8
13	847	354	165	13,1
14	237	280	113	24,3
15	602	206	62	8,4
B 16	967	132	10	19,6
17	357	58	376	4,6
18	723	423	324	15,9
19	113	349	273	27,1
B 20	478	275	221	11,1

Fate le somme dell'*epoche* e del *moto* degli argomenti: e sottraetene la *costante* quando le somme ne risultassero maggiori. Indi a tali somme o residui aggiugnete il numero dei giorni dell'anno, ed avrete le quattro somme per la Tav. XXXI.

Tav. XXXI. Latitudine *del Sole corrispondente ai tre argomenti* A, B, C.

Somma preparata colla tavola XXX.	A	B	C
	″	″	″
0	+0,10	+0,16	+0,24
50	+0,09	+0,10	+0,21
100	+0,07	+0,00	+0,08
150	+0,04	−0,11	−0,10
200	+0,00	−0,16	−0,21
250	−0,03	−0,14	−0,23
300	−0,06	−0,04	−0,11
350	−0,09	+0,07	+0,08
400	−0,11	+0,15	+0,21
450	−0,11	+0,16	+0,24
500	−0,10	+0,09	+0,13
550	−0,09	−0,02	−0,04
600	−0,06	−0,13	−0,20
650	−0,03	−0,16	−0,25
700	+0,01	−0,12	−0,16
750	+0,04	−0,02	+0,01
800	+0,07	+0,09	+0,17
850	+0,09	+0,15	+0,24
900	+0,11	+0,15	+0,18
950	+0,11	+0,07	+0,0[illegible]
1000	+0,10	−0,04	−0,08
1050	+0,08	−0,14	−0,25
1100	+0,05	−0,16	−0,20
1150	+0,02	−0,11	−0,07
1200	−0,01	−0,00	+0,13
1250	−0,05	+0,11	+0,23
1300	−0,08	+0,16	+0,21
1350	−0,10	+0,14	+0,04

TAV. XXXI. cont. *Latitudine del Sole corrispondente al quarto argomento D.*

Somma preparata colla Tav. XXX.			Latitudine del Sole			
			"			
0	136	272	+0,00-	136	272	408
2	138	274	+0,30-	134	270	406
4	140	276	+0,53-	132	268	404
6	142	278	+0,66-	130	266	402
8	144	280	+0,65-	128	264	400
10	146	282	+0,50-	126	262	398
12	148	284	+0,24-	124	260	396
14	150	286	-0,06+	122	258	394
16	152	288	-0,35+	120	256	392
18	154	290	-0,57+	118	254	390
20	156	292	-0,67+	116	252	388
22	158	294	-0,62+	114	250	386
24	160	296	-0,46+	112	248	384
26	162	298	-0,19+	110	246	382
28	164	300	+0,12-	108	244	380
30	166	302	+0,41-	106	242	378
32	168	304	+0,61-	104	240	376
34	170	306	+0,67-	102	238	374
36	172	308	+0,61-	100	236	372
38	174	310	+0,41-	98	234	370
40	176	312	+0,12-	96	232	368
42	178	314	-0,18+	94	230	366
44	180	316	-0,45+	92	228	364
46	182	318	-0,62+	90	226	362
48	184	320	-0,66+	88	224	360
50	186	322	-0,57+	86	222	358
52	188	324	-0,37+	84	220	356
54	190	326	-0,07+	82	218	354
56	192	328	+0,24-	80	216	352
58	194	330	+0,49-	78	214	350
60	196	332	+0,66-	76	212	348
62	198	334	+0,67-	74	210	346
64	200	336	+0,54-	72	208	344
66	202	338	+0,30-	70	206	342
68	204	340	+0,00-	68	204	340
			Latitudine del ☉	Somma preparata colla Tav. XXX.		

TAV. XXXII. *Fattori della latitudine del Sole trovata con la tav. XXXI.*

Giorno dell' anno	Fattore per l'Ascensione Retta	Fattore per la Declinazione	Giorni del mese	
0	-0,09	+1,00	Gennajo	1
10	-0,16	+0,99		10
20	-0,22	+0,98		21
30	-0,28	+0,96		31
40	-0,33	+0,95	Febb.	10
50	-0,36	+0,94		20
60	-0,38	+0,93	Marzo	2
70	-0,39	+0,92		12
80	-0,40	+0,92		22
90	-0,39	+0,92	Aprile	1
100	-0,38	+0,93		11
110	-0,36	+0,94		21
120	-0,33	+0,95	Maggio	1
130	-0,29	+0,96		11
140	-0,23	+0,98		21
150	-0,17	+0,99		31
160	-0,10	+1,00	Giugno	10
170	-0,02	+1,00		20
180	+0,06	+1,00		30
190	+0,13	+0,99	Luglio	10
200	+0,20	+0,98		20
210	+0,26	+0,97		30
220	+0,31	+0,96	Agosto.	9
230	+0,34	+0,94		19
240	+0,37	+0,93		29
250	+0,39	+0,92	Settem.	8
260	+0,40	+0,92		18
270	+0,40	+0,92		28
280	+0,39	+0,92	Ottobre.	8
290	+0,37	+0,93		18
300	+0,35	+0,94		28
310	+ 0,31	+0,95	Novem.	7
320	+0,26	+0,97		17
330	+0,20	+0,98		27
340	+0,13	+0,99	Dicem.	7
350	+0,05	+1,00		17
360	-0,03	+1,00		27
365	-0,06	+1,00	Gennaio	0

La somma delle equazioncelle A, B, C, D darà la *latitudine* del Sole.

La latitudine moltiplicata per li fattori della tav. XXXII avuto riguardo ai segni, si applicherà all'AR. ed alla Decl. calcolate per convertirle nelle osservate. Se la Declinaz. del ☉ è australe si cambia il segno alla Lat. in Decl.

Tav. XXXIII. *Epoche e movimenti della* Longitudine media *del Sole, dell'*Apogeo *del Sole, e del* Nodo *Lunare per preparare gli argomenti dell'* Aberrazione *e della* Nutazione.

Epoche a mezzodi medio dei 31 Dic.	Longitudine media del Sole	Longitudine dell'Apogeo	Longitudine del Nodo ☾
	s o	s o	s o
1750 C	9. 9, 99	3. 8, 61	9.10, 33
1800 C	9. 9, 87	3. 9, 47	1. 3, 26
1900 C	9. 9, 65	3.11, 19	8.19, 12

In anni	Movimenti della Longitudine media ☉	Movimenti della Longitudine Apogeo	Movimenti del supplemento del ☊ Lunare
	s o	o	s o
1	11.29, 76	0, 02	11.10, 67
2	11.29, 52	0, 03	10.21, 34
3	11.29, 28	0, 05	10. 2, 01
B 4	0. 0, 03	0, 07	9.12, 63
5	11.29, 79	0, 09	8.23, 30
6	11.29, 55	0, 10	8. 3, 97
7	11.29, 31	0, 12	7.14, 65
B 8	0. 0, 06	0, 14	6.25, 26
9	11.29, 82	0, 15	6. 5, 93
10	11.29, 58	0, 17	5.16, 61
11	11.29, 34	0, 19	4.27, 28
B 12	0. 0, 09	0, 21	4. 7, 90
13	11.29, 85	0, 22	3.18, 57
14	11.29, 61	0, 24	2.29, 24
15	11.29, 38	0, 26	2. 9, 91
B 16	0. 0, 12	0, 28	1.20, 53
17	11.29, 88	0, 29	1. 1, 20
18	11.29, 64	0, 31	0.11, 87
19	11.29, 41	0, 33	11.22, 54
B 20	0. 0, 15	0, 34	11. 3, 16
B 40	0. 0, 31	0, 69	10. 6, 32
B 60	0. 0, 46	1, 03	9. 9, 48
B 80	0. 0, 61	1, 38	8.12, 64
B 100	0. 0, 77	1, 72	7.15, 81
C. 100	11.29, 78	1, 72	7.15, 86

In giorni	Movimenti della Longitud. ☉	Movimenti del suppl. del ☊ ☾
	s o	s o
1	0. 0, 99	11.29, 95
2	0. 1, 97	11.29, 89
3	0. 2, 96	11.29, 84
4	0. 3, 94	11.29, 79
5	0. 4, 93	11.29, 73
6	0. 5, 91	11.29, 68
7	0. 6, 90	11.29, 63
8	0. 7, 89	11.29, 58
9	0. 8, 87	11.29, 52
10	0. 9, 86	11.29, 47
20	0.19, 71	11.28, 94
30	0.29, 57	11.28, 41
40	1. 9, 43	11.27, 88
50	1.19, 28	11.27, 35
60	1.29, 14	11.26, 82
70	2. 9, 00	11.26, 29
80	2.18, 85	11.25, 76
90	2.28, 71	11.25, 23
100	3. 8, 57	11.24, 70
200	6.17, 13	11.19, 41
300	9.25, 69	11.14, 11

Li movimenti per gli anni e per li giorni si aggiungano all'epoche rispettive. La long. del Sole per un'altro meridiano, se a Ponente di Palermo si aumenti, se a Levante si diminuisca di 0,041 × diff. dei merid. in ore e decime.

Tav. XXXIV. Equazione dell'orbita *per convertire la Longitudine* ☉ *in ellittica.*

Argom. Long. ☉ — Long. Apogeo.

–	0°	10°	20°	30°	
segni	o	o	o	o	
O	0,00	0,24	0,41	0,59	XI
I	0,59	0,76	0,91	1,03	X
II	1,03	1,12	1,18	1,20	IX
III	1,20	1,19	1,14	1,05	VIII
IV	1,05	0,93	0,78	0,61	VII
V	0,61	0,42	0,21	0,00	VI
					segni
	30°	20°	10°	0°	+

L'equazione dell'Orbita si *sottragga* tra O e VI di Argom. si *aggiunga* tra VI e XII di Argom.

Tav. XXXV. *Aberrazione in Ascensione Retta.*

Arg. Ascensione Retta della stella, e Long. del Sole.

Long. ☉	0 / 180	10 / 190	20 / 200	30 / 210	40 / 220	50 / 230	
s s	″	″	″	″	″	″	s s
O 0 VI	−18,67+	−18,37+	−17,55+	−16,17+	−14,30+	−12,00+	VI 0 XII
10	−18,39+	−18,71+	−18,48+	−17,69+	−16,36+	−14,52+	20
20	−17,55+	−18,48+	−18,87+	−18,67+	−17,92+	−16,61+	10
I 0 VII	−16,17+	−17,69+	−18,67+	−19,10+	−18,91+	−18,19+	V 0 XI
10	−14,30+	−16,35+	−17,91+	−18,93+	−19,37+	−19,23+	20
20	−12,00+	−14,52+	−16,61+	−18,19+	−19,22+	−19,66+	10
II 0 VIII	− 9,34+	−12,25+	−14,80+	−16,88+	−18,48+	−19,50+	IV 0 X
10	− 6,38+	− 9,62+	−12,54+	−15,10+	−17,18+	−18,74+	20
20	− 3,25+	− 6,67+	− 9,91+	−12,83+	−15,37+	−17,44+	10
III 0 IX	− 0,00+	− 3,54+	− 6,96+	−10,18+	−13,09+	−15,59+	III 0 IX
10	+ 3,25−	− 0,28+	− 3,81+	− 7,22+	−10,40+	−13,28+	20
20	+ 6,38−	+ 2,97−	− 0,54+	− 4,03+	− 7,40+	−10,55+	10
IV 0 X	+ 9,34−	+ 6,13−	+ 2,74−	− 0,73+	− 4,17+	− 7,50+	II 0 VIII
10	+12,00−	+ 9,11−	+ 5,94−	+ 2,59−	− 0,83+	− 4,23+	20
20	+14,30−	+11,81−	+ 8,96−	+ 5,84−	+ 2,64−	− 0,82+	10
V 0 XI	+16,17−	+14,15−	+11,72−	+ 8,91−	+ 5,84−	+ 2,59−	I 0 VII
10	+17,55−	+16,06−	+14,11−	+11,72−	+ 8,65−	+ 5,94−	20
20	+18,39−	+17,49−	+16,07−	+14,16−	+11,82−	+ 9,11−	10
VI 0 XII	+18,67−	+18,38−	+17,55−	+16,17−	+14,30−	+12,00−	O 0 VI
	180 / 360	170 / 350	160 / 340	150 / 330	140 / 320	130 / 310	Long. ☉

siegue

Long. ☉	50 / 230	60 / 240	70 / 250	80 / 260	90 / 270	
s s	″	″	″	″	″	s s
O 0 VI	−12,00+	− 9,34+	− 6,38+	− 3,24+	− 0,00+	VI 0 XII
10	−14,52+	−12,25+	− 9,62+	− 6,69+	− 3,53+	20
20	−16,61+	−14,80+	−12,54+	− 9,90+	− 6,96+	10
I 0 VII	−18,19+	−16,89+	−15,10+	−12,83+	−10,18+	V 0 XI
10	−19,23+	−18,48+	−17,20+	−16,37+	−13,07+	20
20	−19,66+	−19,51+	−18,77+	−17,45+	−15,60+	10
II 0 VIII	−19,50+	−19,94+	−19,77+	−18,98+	−17,63+	IV 0 X
10	−18,74+	−19,76+	−20,15+	−19,94+	−19,14+	20
20	−17,44+	−18,98+	−19,95+	−20,30+	−20,05+	10
III 0 IX	−15,59+	−17,63+	−19,12+	−20,04+	−20,35+	III 0 IX
10	−13,28+	−15,74+	−17,78+	−19,18+	−20,05+	20
20	−10,55+	−13,38+	−15,79+	−17,73+	−19,14+	10
IV 0 X	− 7,50+	−10,59+	−13,38+	−15,74+	−17,63+	II 0 VIII
10	− 4,23+	− 7,50+	−10,63+	−13,28+	−15,59+	20
20	− 0,82+	− 4,18+	− 7,41+	−10,40+	−13,07+	10
V 0 XI	+ 2,59−	− 0,73+	− 4,03+	− 7,22+	−10,18+	I 0 VII
10	+ 5,94−	+ 2,74−	− 0,54+	− 3,82+	− 6,96+	20
20	+ 9,11−	+ 6,14−	+ 2,96+	− 0,28+	− 3,53+	10
VI 0 XII	+12,00−	+ 9,34−	+ 6,38−	+ 3,24−	+ 0,00−	O 0 VI
	130 / 310	120 / 300	110 / 290	100 / 280	90 / 270	Long. ☉

Moltiplicate per la *secante* della Declinazione.
Da 180° a 360° di AR. cambiate i segni della tavola.

TAV. XXXVI. *Aberrazione in Declinazione.* Prima parte.

Arg. Ascensione Retta della stella, e Long. del Sole.

Long. ☉	0	10	20	30	40	50	
	180	190	200	210	220	230	
s s	″	″	″	″	″	″	s s
O 0 VI	- 0,00+	+ 3,25-	+ 6,38-	+ 9,34-	+12,01-	+14,30-	XII 0 VI
10	- 3,63+	- 0,29+	+ 2,97-	+ 6,15-	+ 9,11-	+11,81-	20
20	- 6,96+	- 3,82+	- 0,56+	+ 2,74-	+ 5,96-	+ 8,96-	10
I 0 VII	-10,18+	- 7,22+	- 4,03+	- 0,73+	+ 2,60-	+ 5,84-	XI 0 V
10	-13,67+	-10,40+	- 7,40+	- 4,17+	- 0,83+	+ 2,54-	20
20	-15,60+	-13,27+	-10,54+	- 7,50+	- 4,23+	- 0,82+	10
II 0 VIII	-17,63+	-15,74+	-13,38+	-10,59+	- 7,50+	- 4,17+	X 0 IV
10	-19,14+	-17,73+	-15,80+	-13,38+	-10,54+	- 7,40+	20
20	-20,05+	-19,18+	-17,74+	-15,64+	-13,28+	-10,40+	10
III 0 IX	-20,35+	-20,04+	-19,13+	-17,63+	-15,60+	-13,08+	IX 0 III
10	-26,05+	-20,30+	-19,95+	-18,98+	-17,44+	-15,37+	20
20	-19,14+	-19,94+	-20,15+	-19,76+	-18,74+	-17,19+	10
IV 0 X	-17,63+	-18,98+	-19,76+	-19,94+	-19,50+	-18,48+	VIII 0 II
10	-15,60+	-17,46+	-18,17+	-19,50+	-19,67+	-19,22+	20
20	-13,67+	-15,38+	-17,20+	-18,48+	-19,23+	-19,37+	10
V 0 XI	-10,18+	-12,82+	-15,10+	-16,89+	-18,19+	-18,93+	VII 0 I
10	- 6,96+	- 9,90+	-12,54+	-14,80+	-16,61+	-17,91+	20
20	- 3,53+	- 6,67+	- 9,62+	-12,25+	-14,53+	-16,35+	10
VI 0 XII	- 0,00+	- 3,25+	- 6,38+	- 9,34+	-12,01+	-14,30+	VI 0 O
	180	170	160	150	140	130	Long. ☉
	360	350	340	330	320	310	

siegue

Long. ☉	50	[illegible]	70	80	90	
	230	[illegible]	250	260	270	
s s	″	″	″	″	″	s
O 0 VI	+14,30-	+16,17-	+17,55-	+18,38-	+18,63-	XII 0 VI
10	+11,81-	+14,16-	+16,07-	+17,50-	+18,39-	20
20	+ 8,96-	+11,72-	+14,11-	+16,07-	+17,55-	10
I 0 VII	+ 5,84-	+ 8,91-	+11,72-	+14,16-	+16,17-	XI 0 V
10	+ 2,54-	+ 5,84-	+ 8,95-	+11,82-	+14,30-	20
20	- 0,82+	+ 2,59-	+ 5,94-	+ 9,11-	+12,00-	10
II 0 VIII	- 4,17+	- 0,73+	+ 2,73-	+ 6,14-	+ 9,34-	X 0 IV
10	- 7,40+	- 4,03+	- 0,54+	+ 2,97-	+ 6,38-	20
20	-10,40+	- 7,22+	- 3,94+	- 0,28+	+ 3,25-	10
III 0 IX	-13,08+	-10,18+	- 6,96+	- 3,53+	- 0,00+	IX 0 III
10	-15,37+	-12,83+	- 9,90+	- 6,67+	- 3,25+	20
20	-17,19+	-15,10+	-12,54+	- 9,61+	- 6,38+	10
IV 0 X	-18,48+	-16,89+	-14,80+	-12,25+	- 9,34+	VIII 0 II
10	-19,22+	-18,19+	-16,61+	-14,52+	-12,00+	20
20	-19,37+	-18,93+	-17,90+	-16,35+	-14,30+	10
V 0 XI	-18,93+	-19,10+	-18,67+	-17,70+	-16,17+	VII 0 I
10	-17,91+	-18,67+	-18,87+	-18,49+	-17,55+	20
20	-16,35+	-17,69+	-18,49+	-18,72+	-18,39+	10
VI 0 XII	-14,30+	-16,17+	-17,55+	-18,38+	-18,66+	VI 0 O
	130	120	110	100	90	Long. ☉
	310	300	290	280	270.	

Moltiplicate per il *seno* della Declinazione (Tav. XLVI).
Da 180 a 360 di Ali. cambiate i segni della tavola.

Tav. XXXVII. *Aberrazione in Declinazione.* Seconda parte.

Arg. Long. del Sole, e Declinazione della stella.

Declinazione della stella	s O − / VI + / VI + / XII −	s I − / V + / VII + / XI −	s II − / IV + / VIII + / X −	s III − / III + / IX + / IX −
°	″	″	″	″
0	8,10	7,02	4,06	0,00
5	8,07	6,99	4,04	0,00
10	7,99	6,91	3,99	0,00
15	7,83	6,77	3,90	0,00
20	7,63	6,59	3,81	0,00
25	7,34	6,36	3,68	0,00
30	7,02	6,08	3,51	0,00
35	6,63	5,75	3,32	0,00
40	6,21	5,39	3,11	0,00
45	5,72	4,46	2,87	0,00
50	5,21	4,52	2,60	0,00
55	4,65	4,03	2,33	0,00
60	4,05	3,51	2,04	0,00
65	3,43	2,97	1,72	0,00
70	2,76	2,40	1,40	0,00
75	2,10	1,82	1,05	0,00
80	1,42	1,23	0,70	0,00
85	0,71	0,61	0,35	0,00
90	0,00	0,00	0,00	0,00

Cambiate li segni delle quantità se la Declinazione è australe.

Tav. XXXVIII. *Nutazione in AR.* Prima parte.

Arg. Longitudine del ☊

Gradi	s s O VI − +	s s I VII − +	s s II VIII − +	
°	″	″	″	°
0	0,00	8,02	13,89	30
1	0,28	8,27	14,04	29
2	0,56	8,51	14,16	28
3	0,84	8,74	14,30	27
4	1,12	8,98	14,42	26
5	1,40	9,20	14,54	25
6	1,67	9,43	14,66	24
7	1,95	9,66	14,77	23
8	2,24	9,88	14,88	22
9	2,61	10,10	14,99	21
10	2,79	10,32	15,08	20
11	3,06	10,52	15,17	19
12	3,34	10,73	15,26	18
13	3,61	10,94	15,35	17
14	3,88	11,15	15,42	16
15	4,15	11,35	15,50	15
16	4,42	11,54	15,57	14
17	4,69	11,73	15,63	13
18	4,96	11,93	15,69	12
19	5,22	12,12	15,75	11
20	5,49	12,29	15,81	10
21	5,75	12,47	15,85	9
22	6,01	12,65	15,89	8
23	6,27	12,81	15,93	7
24	6,53	12,98	15,96	6
25	6,78	13,15	15,98	5
26	7,03	13,30	16,01	4
27	7,29	13,46	16,02	3
28	7,54	13,61	16,03	2
29	7,78	13,76	16,04	1
30	8,02	13,89	16,05	0
	− + s s V XI	− + s s IV X	− + s s III IX	Gradi

Moltiplicando per 1,09 le quantità date dalla tavola; oppure dividendole per *cos* obbliquità, si ha la Nutazione de' punti Equinoziali in Longitudine.

TAV. XXXIX. *Nutazione in AR.* Seconda parte.
Arg. Ascensione Retta della stella, e Longitudine del Nodo.

Lon. Nodo	0	10	20	30	40	50	
	180	190	200	210	220	230	
s ° s	″	″	″	″	″	″	s ° s
O 0 VI	− 9,36+	− 9,21+	− 8,80+	− 8,11+	− 7,18+	− 6,01+	VI 0 XII
10	− 9,21+	− 9,29+	− 9,08+	− 8,59+	− 7,83+	− 6,85+	20
20	− 8,80+	− 9,08+	− 9,08+	− 8,80+	− 8,27+	− 7,48+	10
I 0 VII	− 8,11+	− 8,59+	− 8,80+	− 8,79+	− 8,44+	− 7,88+	V 0 XI
10	− 7,17+	− 7,83+	− 8,27+	− 8,44+	− 8,37+	− 8,03+	20
20	− 6,02+	− 6,84+	− 7,48+	− 7,88+	− 8,04+	− 7,96+	10
II 0 VIII	− 4,69+	− 5,66+	− 6,46+	− 7,07+	− 7,47+	− 7,64+	IV 0 X
10	− 3,19+	− 4,30+	− 5,25+	− 6,04+	− 6,67+	− 7,07+	20
20	− 1,62+	− 2,80+	− 3,88+	− 4,85+	− 5,66+	− 6,30+	10
III 0 IX	− 0,00+	− 1,22+	− 2,39+	− 3,48+	− 4,48+	− 5,35+	III 0 IX
10	+ 1,62−	+ 0,41−	− 0,83+	− 2,02+	− 3,17+	− 4,21+	20
20	+ 3,19−	+ 2,03−	+ 0,77−	− 0,50+	− 1,76+	− 2,95+	10
IV 0 X	+ 4,69−	+ 3,56−	+ 2,33−	+ 1,04−	− 0,30+	− 1,61+	II 0 VIII
10	+ 6,02−	+ 5,00−	+ 3,83−	+ 2,54−	+ 1,19−	− 0,23+	20
20	+ 7,17−	+ 6,29−	+ 5,21−	+ 3,96−	+ 2,62−	+ 1,18−	10
V 0 XI	+ 8,11−	+ 7,37−	+ 6,43−	+ 5,28−	+ 3,97−	+ 2,54−	I 0 VII
10	+ 8,80−	+ 8,24−	+ 7,45−	+ 6,43−	+ 5,20−	+ 3,83−	20
20	+ 9,21−	+ 8,86−	+ 8,25−	+ 7,37−	+ 6,28−	+ 5,00−	10
VI 0 XII	+ 9,36−	+ 9,21−	+ 8,80−	+ 8,11−	+ 7,18−	+ 6,01−	O 0 VI
	180	170	160	150	140	130	Lon. Nodo
	360	350	340	330	320	310	

siegue

Lon. Nodo	50	60	70	80	90	
	230	240	250	260	270	
s ° s	″	″	″	″	″	s ° s
O 0 VI	− 6,01+	− 4,69+	− 3,19+	− 1,63+	− 0,00+	VI 0 XII
10	− 6,85+	− 5,66+	− 4,27+	− 2,80+	− 1,21+	20
20	− 7,48+	− 6,46+	− 5,25+	− 3,88+	− 2,38+	10
I 0 VII	− 7,88+	− 7,07+	− 6,64+	− 4,85+	− 3,48+	V 0 XI
10	− 8,03+	− 7,47+	− 6,66+	− 5,66+	− 4,48+	20
20	− 7,96+	− 7,63+	− 7,06+	− 6,30+	− 5,34+	10
II 0 VIII	− 7,64+	− 7,56+	− 7,27+	− 6,76+	− 6,03+	IV 0 X
10	− 7,07+	− 7,27+	− 7,25+	− 6,97+	− 6,55+	20
20	− 6,30+	− 6,76+	− 6,99+	− 7,03+	− 6,86+	10
III 0 IX	− 5,35+	− 6,03+	− 6,55+	− 6,86+	− 6,97+	III 0 IX
10	− 4,21+	− 5,13+	− 5,90+	− 6,48+	− 6,86+	20
20	− 2,95+	− 4,08+	− 5,06+	− 5,89+	− 6,55+	10
IV 0 X	− 1,61+	− 2,89+	− 4,07+	− 5,14+	− 6,03+	II 0 VIII
10	− 0,23+	− 1,61+	− 2,96+	− 4,20+	− 5,34+	20
20	+ 1,18−	− 0,29+	− 1,76+	− 3,16+	− 4,48+	10
V 0 XI	+ 2,54−	+ 1,04−	− 0,51+	− 2,03+	− 3,48+	I 0 VII
10	+ 3,83−	+ 2,33−	+ 0,78−	− 0,83+	− 2,38+	20
20	+ 5,00−	+ 3,56−	+ 2,03−	+ 0,40−	− 1,21+	10
VI 0 XII	+ 6,01−	+ 4,69−	+ 3,19−	+ 1,63−	+ 0,00−	O 0 VI
	130	120	110	100	90	Lon. Nodo
	310	300	290	280	270	

Moltiplicate per la *tangente* della Declinazione (Tav. XLVI).

Cambiate i segni della tavola { se la Declinazione è *australe* da 0° a 180° di AR. / se la Declinazione è *boreale* da 180° a 360° di AR.

Tav. XL. *Nutazione in Declinazione.*

Arg. Ascensione Retta della stella, e Long. del Nodo.

Lon. Nodo	0	10	20	30	40	50	
	180	190	200	210	220	230	
s s	″	″	″	″	″	″	s
O o VI	+ 0,00−	+ 1,63−	+ 3,19−	+ 4,49−	+ 6,01−	+ 7,18−	XII o VI
20	− 1,21+	+ 0,40−	+ 2,03−	+ 3,56−	+ 5,00−	+ 6,28−	20
10	− 2,38+	− 0,83+	+ 0,78−	+ 2,33−	+ 3,83−	+ 5,20−	10
I o VII	− 3,48+	− 2,03+	− 0,51+	+ 1,04−	+ 2,54−	+ 3,97−	XI o V
10	− 4,48+	− 3,16+	− 1,76+	− 0,29+	+ 1,18−	+ 2,62−	20
20	− 5,34+	− 4,20+	− 2,96+	− 1,61+	− 0,23+	+ 1,19−	10
II o VIII	− 6,03+	− 5,14+	− 4,07+	− 2,89+	− 1,61+	− 0,30+	X o IV
10	− 6,55+	− 5,89+	− 5,06+	− 4,08+	− 2,95+	− 1,76+	20
20	− 6,86+	− 6,48+	− 5,90+	− 5,13+	− 4,21+	− 3,17+	10
III o IX	− 6,97+	− 6,86+	− 6,55+	− 6,03+	− 5,35+	− 4,48+	IX o III
10	− 6,86+	− 7,03+	− 6,99+	− 6,76+	− 6,30+	− 5,66+	20
20	− 6,55+	− 6,97+	− 7,25+	− 7,27+	− 7,02+	− 6,67+	10
IV o X	− 6,03+	− 6,76+	− 7,27+	− 7,56+	− 7,64+	− 7,47+	VIII o II
10	− 5,34+	− 6,30+	− 7,06+	− 7,63+	− 7,96+	− 8,04+	20
20	− 4,48+	− 5,66+	− 6,66+	− 7,47+	− 8,03+	− 8,37+	10
V o XI	− 3,48+	− 4,85+	− 6,04+	− 7,07+	− 7,88+	− 8,44+	VII o I
10	− 2,38+	− 3,88+	− 5,25+	− 6,46+	− 7,48+	− 8,27+	20
20	− 1,21+	− 2,80+	− 4,27+	− 5,66+	− 6,85+	− 7,83+	10
VI o XII	− 0,00+	− 1,63+	− 3,19+	− 4,69+	− 6,01+	− 7,18+	VI o O
	180	170	160	150	140	130	Lon. Nodo
	360	350	340	330	320	310	

siegue

Lon. Nodo	50	60	70	80	90	
	230	240	250	260	270	
s s	″	″	″	″	″	s
O o VI	+ 7,18−	+ 8,11−	+ 8,80−	+ 9,21−	+ 9,36−	XII o VI
10	+ 6,28−	+ 7,37−	+ 8,25−	+ 8,86−	+ 9,21−	20
20	+ 5,20−	+ 6,43−	+ 7,45−	+ 8,24−	+ 8,80−	10
I o VII	+ 3,97−	+ 5,28−	+ 6,43−	+ 7,37−	+ 8,11−	XI o V
10	+ 2,62−	+ 3,96−	+ 5,21−	+ 6,29−	+ 7,17−	20
20	+ 1,19−	+ 2,54−	+ 3,83−	+ 5,00−	+ 6,02−	10
II o VIII	− 0,30+	+ 1,04−	+ 2,33−	+ 3,56−	+ 4,69−	X o IV
10	− 1,76+	− 0,50+	+ 0,77−	+ 2,03−	+ 3,19−	20
20	− 3,17+	− 2,02+	− 0,83+	+ 0,41−	+ 1,62−	10
III o IX	− 4,48+	− 3,48+	− 2,39+	− 1,22+	− 0,00+	IX o III
10	− 5,66+	− 4,85+	− 3,88+	− 2,80+	− 1,62+	20
20	− 6,67+	− 6,04+	− 5,25+	− 4,30+	− 3,19+	10
IV o X	− 7,47+	− 7,07+	− 6,46+	− 5,66+	− 4,69+	VIII o II
10	− 8,04+	− 7,88+	− 7,48+	− 6,84+	− 6,02+	20
20	− 8,37+	− 8,44+	− 8,27+	− 7,83+	− 7,17+	10
V o XI	− 8,44+	− 8,77+	− 8,80+	− 8,59+	− 8,11+	VII o I
10	− 8,27+	− 8,80+	− 9,08+	− 9,08+	− 8,80+	20
20	− 7,83+	− 8,59+	− 9,08+	− 9,29+	− 9,21+	10
IV o XII	− 7,18+	− 8,11+	− 8,80+	− 9,21+	− 9,36+	VI o O
	130	120	110	100	90	Lon. Nodo
	310	300	290	280	270	

Cambiate i segni della tavola { se la Declinazione è *australe* da 0° a 180° di AR.
se la Declinazione è *boreale* da 180° a 360° di AR.

Tav. XLI. *Nutazione Solare in AR.* Prima parte.

Arg. Longitudine del Sole.

Long. ☉	Nutaz.	Long. ☉
s s	″	s s
O 0 VI	−0,00+	VI 0 XII
15	−0,37+	15
I 0 V	−0,64+	VII 0 XI
15	−0,94+	15
II 0 IV	−0,64+	VIII 0 X
15	−0,37+	15
III 0 III	−0,00+	IX 0 IX

Tav. XLII. *Nutazione Solare in AR.* Seconda parte.

Arg. Longitudine del Sole, ed AR. della Stella.

Long. ☉	0 / 180	30 / 210	60 / 240	90 / 270	
s s	″	″	″	″	s s
O 0 III	−0,43+	−0,38+	−0,22+	−0,00+	VI 0 IX
10	−0,41+	−0,41+	−0,30+	−0,11+	10
20	−0,33+	−0,39+	−0,35+	−0,21+	20
I 0 IV	−0,22+	−0,33+	−0,35+	−0,28+	VII 0 X
10	−0,08+	−0,23+	−0,31+	−0,32+	10
20	+0,08−	−0,09+	−0,24+	−0,32+	20
II 0 V	+0,22−	+0,05−	−0,13+	−0,28+	VIII 0 XI
10	+0,33−	+0,18−	−0,01+	−0,21+	10
20	+0,41−	+0,30−	+0,11−	−0,11+	20
III 0 VI	+0,43−	+0,38−	+0,12−	−0,00+	IX 0 XII
	180 / 360	150 / 330	120 / 300	90 / 270	Long. ☉

Moltiplicate per la *tangente* della Declinazione.

Cambiate i segni della tavola { per le stelle *australi* da 0 a 180. / per le stelle *boreali* da 180 a 360.

Tav. XLIII. *Nutazione Solare in Declinazione.*

Arg. Longitudine del Sole, ed AR. della Stella.

Long. ☉	0 / 180	30 / 210	60 / 240	90 / 270	
s s	″	″	″	″	s s
O 0 III	− 0,00+	+ 0,22−	+ 0,38−	+ 0,43−	VI 0 IX
10	− 0,11+	+ 0,11−	+ 0,30−	+ 0,41−	10
20	− 0,21+	− 0,01+	+ 0,18−	+ 0,33−	20
I 0 IV	− 0,28+	− 0,13+	+ 0,05−	+ 0,22−	VII 0 X
10	− 0,32+	− 0,24+	− 0,09+	+ 0,08+	10
20	− 0,32+	− 0,31+	− 0,23+	− 0,08+	20
II 0 V	− 0,28+	− 0,35+	− 0,33+	− 0,22+	VIII 0 XI
10	− 0,21+	− 0,35+	− 0,39+	− 0,33+	10
20	− 0,14+	− 0,30+	− 0,41+	− 0,41+	20
III 0 VI	− 0,00+	− 0,22+	− 0,38+	− 0,43+	IX 0 XII
	180 / 360	150 / 330	120 / 300	90 / 270	Long. ☉

Cambiate i segni della tav. { per le declinazioni *australi* da 0 a 180 di AR. / per le declinazioni *boreali* da 180 a 360 di AR.

Tav. XLIV. *Precessione annua in Ascensione Retta, e in Declinazione.*

Arg. per la Prec. in AR...... Ascensione retta della stella.
Arg per la Prec. in Declinazione...... Ascensione retta della stella + 90°.
Se l'argomento è maggiore di 180° si sottraggano 180 dal medesimo.

Argomento	Fattore per l'AR e Precessione per la decl.	Differenza per 60'		Argomento	Fattore per l'AR e Precessione per la decl.	Differenza per 60'		Argomento	Fattore per l'AR e Precessione per la decl.	Differenza per 60'	
°	″	″	°	°	″	″	°	°	″	″	°
0	0,000	0,349	180	30	10,016	0,301	150	60	17,348	0,172	120
1	0,349	0,351	179	31	10,317	0,299	149	61	17,520	0,167	119
2	0,700	0,348	178	32	10,616	0,294	148	62	17,687	0,162	118
3	1,048	0,349	177	33	10,910	0,293	147	63	17,849	0,156	117
4	1,397	0,349	176	34	11,203	0,288	146	64	18,005	0,151	116
5	1,746	0,348	175	35	11,491	0,284	145	65	18,156	0,145	115
6	2,094	0,348	174	36	11,775	0,281	144	66	18,301	0,140	114
7	2,442	0,347	173	37	12,056	0,277	143	67	18,441	0,134	113
8	2,789	0,345	172	38	12,333	0,274	142	68	18,575	0,128	112
9	3,134	0,344	171	39	12,607	0,270	141	69	18,703	0,122	111
10	3,478	0,344	170	40	12,877	0,266	140	70	18,825	0,117	110
11	3,822	0,344	169	41	13,143	0,262	139	71	18,942	0,110	109
12	4,166	0,341	168	42	13,405	0,257	138	72	19,052	0,106	108
13	4,507	0,339	167	43	13,662	0,253	137	73	19,158	0,100	107
14	4,846	0,339	166	44	13,915	0,249	136	74	19,258	0,092	106
15	5,185	0,337	165	45	14,164	0,246	135	75	19,350	0,088	105
16	5,522	0,335	164	46	14,410	0,241	134	76	19,438	0,082	104
17	5,857	0,334	163	47	14,651	0,236	133	77	19,520	0,076	103
18	6,191	0,331	162	48	14,887	0,231	132	78	19,596	0,069	102
19	6,522	0,329	161	49	15,118	0,228	131	79	19,665	0,064	101
20	6,851	0,328	160	50	15,346	0,222	130	80	19,729	0,057	100
21	7,179	0,325	159	51	15,568	0,217	129	81	19,786	0,052	99
22	7,504	0,323	158	52	15,785	0,213	128	82	19,838	0,046	98
23	7,827	0,321	157	53	15,998	0,209	127	83	19,884	0,040	97
24	8,148	0,318	156	54	16,207	0,202	126	84	19,924	0,032	96
25	8,466	0,316	155	55	16,409	0,198	125	85	19,956	0,028	95
26	8,782	0,313	154	56	16,607	0,194	124	86	19,984	0,021	94
27	9,095	0,310	153	57	16,801	0,188	123	87	20,005	0,015	93
28	9,405	0,307	152	58	16,989	0,182	122	88	20,020	0,009	92
29	9,712	0,304	151	59	17,171	0,177	121	89	20,029	0,004	91
30	10,016		150	60	17,348		120	90	20,033		90
			Argom.				Argom.				Argom.

1° Precessione in AR = 46,030 + quantità trovata × *tangente* Declinazione.............
da 0° a 180° di AR. + se la Declinazione è *boreale*: — se la Declinazione è *australe*
da 180° a 360° di AR. + se la Declinazione è *australe*: — se la Declinazione è *boreale*
2° Per avere la Precessione in Declinazione si aggiungano 90° all' AR. della stella, e la quantità trovata nella tavola sarà la cercata precessione: la quale da 0° a 180° dell'Argomento fa crescere le Declinazioni Boreali, e diminuire le Australi, e da 180° a 360° dell'Argomento fa il contrario. Generalmente nel 1° e 4° quadrante di AR. la precessione avvicina le stelle al Polo Boreale, e ne le allontana nel 2° e 3°.

Tav. XLV. Secanti *per calcolare colla tav. XXXV l' Aberrazione in Alt.*

Gradi	Secante	Gradi	Secante	Gradi	Secante	Gradi	Secante	Gradi	Secante	Gradi	Secante
0°	1,000	15°	1,035	30°	1,155	45°	1,414	60°	2,000	75°	3,864
1	1,000	16	1,040	31	1,167	46	1,440	61	2,063	76	4,134
2	1,001	17	1,046	32	1,179	47	1,466	62	2,130	77	4,445
3	1,001	18	1,051	33	1,192	48	1,494	63	2,203	78	4,810
4	1,002	19	1,058	34	1,206	49	1,524	64	2,281	79	5,241
5	1,004	20	1,064	35	1,221	50	1,556	65	2,366	80	5,759
6	1,006	21	1,071	36	1,236	51	1,589	66	2,459	81	6,392
7	1,008	22	1,079	37	1,252	52	1,624	67	2,559	82	7,185
8	1,010	23	1,086	38	1,269	53	1,662	68	2,669	83	8,206
9	1,012	24	1,095	39	1,287	54	1,701	69	2,790	84	9,567
10	1,015	25	1,103	40	1,305	55	1,743	70	2,924	85	11,474
11	1,019	26	1,113	41	1,325	56	1,788	71	3,072	86	14,336
12	1,022	27	1,122	42	1,346	57	1,837	72	3,236	87	19,107
13	1,026	28	1,133	43	1,367	58	1,887	73	3,420	88	28,654
14	1,031	29	1,143	44	1,390	59	1,942	74	3,628	89	57,299
15	1,035	30	1,155	45	1,414	60	2,000	75	3,864	90	infinita

Tav. XLVI. Seni *per calcolare colla tav. XXXVI la* prima parte *dell' Aberrazione in Declinazione.*

Gradi	Seno	Gradi	Seno	Gradi	Seno	Gradi	Seno	Gradi	Seno	Gradi	Seno
0°	0,000	15°	0,259	30°	0,500	45°	0,707	60°	0,866	75°	0,966
1	0,017	16	0,276	31	0,515	46	0,719	61	0,875	76	0,970
2	0,035	17	0,292	32	0,530	47	0,731	62	0,883	77	0,974
3	0,052	18	0,309	33	0,545	48	0,743	63	0,891	78	0,978
4	0,070	19	0,326	34	0,559	49	0,755	64	0,899	79	0,982
5	0,087	20	0,342	35	0,574	50	0,766	65	0,906	80	0,985
6	0,105	21	0,358	36	0,588	51	0,777	66	0,914	81	0,988
7	0,122	22	0,375	37	0,602	52	0,788	67	0,921	82	0,990
8	0.139	23	0,391	38	0,616	53	0,799	68	0,927	83	0,993
9	0,156	24	0,407	39	0,629	54	0,809	69	0,934	84	0,995
10	0,174	25	0,423	40	0,643	55	0,819	70	0,940	85	0,996
11	0,191	26	0,438	41	0,656	56	0,829	71	0,946	86	0,998
12	0,208	27	0,454	42	0,669	57	0,839	72	0,951	87	0,999
13	0,225	28	0,469	43	0,682	58	0,848	73	0,956	88	0,999
14	0,242	29	0,485	44	0,695	59	0,857	74	0,961	89	1,000
15	0,259	30	0,500	45	0,707	60	0,866	75	0,966	90	1,000

Tav. XLVII. Tangenti, *per calcolare colla tav.* **XXXIX**, *e* **XLII** *le* seconde parti *della Nutazione in AR. e colla tav.* **XLIV** *il* secondo termine *della Precessione in AR.*

Gradi	Tangente	Gradi	Tangente	Gradi	Tangente	Gradi	Tangente	Gradi	Tangente	Gradi	Tangente
0°	0,000	15°	0,268	30°	0,577	45°	1,000	60°	1,732	75°	3,732
1	0,017	16	0,287	31	0,601	46	1,036	61	1,804	76	4,011
2	0,035	17	0,306	32	0,625	47	1,072	62	1,881	77	4,331
3	0,052	18	0,325	33	0,649	48	1,111	63	1,963	78	4,705
4	0,070	19	0,344	34	0,675	49	1,150	64	2,050	79	5,145
5	0,087	20	0,364	35	0,700	50	1,192	65	2,145	80	5,671
6	0,105	21	0,384	36	0,727	51	1,235	66	2,246	81	6,314
7	0,123	22	0,404	37	0,754	52	1,280	67	2,356	82	7,115
8	0,141	23	0,424	38	0,781	53	1,327	68	2,475	83	8,144
9	0,158	24	0,445	39	0,810	54	1,376	69	2,605	84	9,514
10	0,176	25	0,466	40	0,839	55	1,428	70	2,747	85	11,430
11	0,194	26	0,488	41	0,869	56	1,483	71	2,904	86	14,307
12	0,213	27	0,510	42	0,900	57	1,540	72	3,078	87	19,081
13	0,231	28	0,532	43	0,932	58	1,600	73	3,271	88	28,636
14	0,249	29	0,554	44	0,966	59	1,664	74	3,487	89	57,290
15	0,268	30	0,577	45	1,000	60	1,732	75	3,732	90	infinità

Tav. XLVIII. Fattori *della Precessione annua in AR. e in Declinazione corrispondenti ai giorni del mese, per calcolarne la parte proporzionale ai giorni dell'anno.*

Gennaio g		Marzo g		Maggio g		Luglio g		Settembre g		Novembre g	
1	0,01	2	0,18	12	0,34	2	0,51	4	0,69	15	0,85
3	0,02	7	0.19	16	0,35	5	0,52	9	0,70	18	0,86
6	0,03	12	0,20	19	0,36	8	0,53	14	0,71	21	0,87
9	0,04	17	0,21	22	0,37	11	0,54	19	0,72	24	0,88
12	0,05	22	0,22	25	0,38	14	0,55	24	0,73	27	0,89
15	0,06	27	0,23	28	0,39	17	0,56	29	0,74	30	0,90
19	0,07	Aprile		31	0,40	20	0,57	Ottobre		Dicembre	
22	0.08	1	0,24	Giugno		23	0,58	4	0,75	3	0,91
25	0,09	6	0,25	3	0,41	27	0,59	9	0,76	6	0,92
28	0,10	11	0,26	6	0,42	30	0,60	14	0,77	9	0,93
Febbraio		15	0,27	9	0,43	Agosto		18	0,78	12	0,94
1	0,11	20	0,28	12	0,44	3	0,61	23	0,79	15	0,95
4	0,12	24	0,29	15	0,45	6	0,62	27	0,80	18	0,96
8	0,13	28	0,30	18	0,46	10	0,63	31	0,81	21	0,97
12	0,14	Maggio		21	0,47	14	0,64	Novembre		23	0,98
16	0,15	2	0,31	24	0,48	18	0,65	4	0,82	26	0,99
21	0,16	5	0,32	27	0,49	22	0,66	8	0,83	29	1,00
25	0,17	9	0,33	29	0,50	26	0,67	11	0,84	31	1,01
						30	0,68				

USO DELLE TAVOLE

TAV. I. — XI.

Le prime otto tavole non hanno bisogno nè di spiegazione nè di esempj. Sono in esse riunite le espressioni più commode e di maggiore uso, che secondo le occorrenze si sostituiscono nelle formole, onde colle dovute trasformazioni ridurle allo stato in cui si vogliono. Li numeri sulla destra indicano li § della Goniometria.

Nella tav. IX si contengono le espressioni analitiche di una parte del triangolo in tre delle altre. In essa le formole 37 e seguenti, per li precetti dati al § 184 possono mettersi ciascuna in due altri aspetti.

Le tavole X e XI presentano le formole più commode e più brevi per la soluzione de' triangoli secondo i diversi casi. Non sono espresse rapporto a nissuna figura, ma nella maniera più generale e più utile alla pratica.

TAV. XII.

1. Si cercano le parti del raggio corrispondenti a 232°. 47' 34",28 della circonferenza

TAV. XII..........	per gradi...	210..........	3,6651914
		22..........	0,3839724
	per minuti..	40..........	0,0116355
		7..........	0,0020362
	per secondi.	30..........	0,0001454
		4..........	0,0000194
	per	0", 2..................	0,0000010
		0 ,08..................	0,0000004

A 232°.47'.34",28 corrispondono raggi... 4,0630017

Tav. XXVII. *Per ridurre il tempo in decimali del l'anno.*

Giorni del mese	Dec. dell'anno comun.	Dec. dell'anno bisest.
o Gennajo	0,0000	0,0000
o Febbrajo	0,0849	0,0847
o Marzo	0,1616	0,1639
o Aprile	0,2466	0,2486
o Maggio	0,3288	0,3303
o Giugno	0,4137	0,4153
o Luglio	0,4959	0,4973
o Agosto	0,5808	0,5820
o Settem.	0,6658	0,6667
o Ottobre	0,7479	0,7484
o Novem.	0,8329	0,8333
o Dicemb.	0,9151	0,9153

Per giorni	Decimali dell' anno
1	0,0027
2	0,0055
3	0,0082
4	0,0110
5	0,0137
6	0,0164
7	0,0192
8	0,0219
9	0,0247
10	0,0274
20	0,0548
30	0,0822
31	0,0849
Per ore 1	0,0001
2	0,0002
3	0,0003
6	0,0007
9	0,0010
12	0,0014
15	0,0017
18	0,0021
21	0,0024
24	0,0027

Tav. XXVIII. *Per ridurre il tempo in giorni dell'anno, e decimali di giorno.*

Giorni del mese	Gio. dell'anno comun	Gio. dell'anno bisest.
o Gennaio	0	0
o Febbraio	31	31
o Marzo	59	60
o Aprile	90	91
o Maggio	120	121
o Giugno	151	152
o Luglio	181	182
o Agosto	212	213
o Settem.	243	244
o Ottobre	273	274
o Novem.	304	305
o Dicemb.	334	335

Ore	Giorni
1	0,0416:
2	0,0833:
3	0,1250:
4	0,1666:
5	0,2083:
6	0,2500:
7	0,2916:
8	0,3333:
9	0,3750:
10	0,4166:
11	0,4583:
12	0,5000:
13	0,5416:
14	0,5833:
15	0,6250:
16	0,6666:
17	0,7083:
18	0,7500:
19	0,7916:
20	0,8333:
21	0,8750:
22	0,9166:
23	0,9583:
24	1,0000:

Min.	Giorni
1'	0,00069
2	0,00138:
3	0,00208
4	0,00277:
5	0,00347
6	0,00416:
7	0,00486
8	0,00555:
9	0,00625
10	0,00694:
20	0,01388:
30	0,02083:
40	0,02777:
50	0,03472.
60	0,04166:

Sec.	Giorni
1"	0,00001
2	0,00002
3	0,00003
4	0,00005
5	0,00006
6	0,00007
7	0,00008
8	0,00009
9	0,00010
10	0,00012
20	0,00023
30	0,00035
40	0,00046
50	0,00058
60	0,00069

Tav. XXIX. *Per ridurre il tempo in decimali di ora.*

Min.	Ore
1'	0,01666:
2	0,03333:
3	0,05
4	0,06666:
5	0,08333:
6	0,1
7	0,11666:
8	0,13333:
9	0,15
10	0,16666:
20	0,33333:
30	0,5
40	0,66666:
50	0,83333:
60	1,0

Sec.	Ore
1"	0,00027:
2	0,00055:
3	0,00083:
4	0,00111:
5	0,00138:
6	0,00166:
7	0,00194:
8	0,00222:
9	0,00250:
10	0,00277.
20	0,00555.
30	0,00833
40	0,01111
50	0,01388
60	0,01666:

Li due punti all'ultima cifra ne indicano la replica all'infinito.

Tav. XXX. *Argomenti per calcolare la* latitudine *del* ☉.

Argomenti	A	B	C	D
Costanti	975	439½	317	27,2
Epoche				
C 1750	149	113	114	20,2
C 1800	148	362	41	22,8
B 1820	626	198	262	6,7
B 1840	129	33	67	18,8
B 1860	606	309	288	3,8
B 1880	109	145	92	15,9
C 1900	587	420	312	0,8

Moto degli argomenti per anni	A	B	C	D
1	365	365	365	11,2
2	730	291	315	22,5
3	120	217	264	6,5
B 4	485	142	212	17,8
5	851	68	161	2,8
6	241	433	109	14,0
7	606	359	58	25,3
B 8	971	285	5	9,3
9	361	211	371	21,5
10	727	137	319	5,6
11	117	63	268	16,8
B 12	482	428	216	0,8
13	847	354	165	13,1
14	237	280	113	24,3
15	602	206	62	8,4
B 16	967	132	10	19,6
17	357	58	376	4,6
18	723	423	324	15,9
19	113	349	273	27,1
B 20	478	275	221	11,1

Fate le somme dell'*epoche* e del *moto degli* argomenti: e sottraetene la *costante* quando le somme ne risultassero maggiori. Indi a tali somme o residui aggiugnete il numero dei giorni dell'anno, ed avrete le quattro somme per la Tav. XXXI.

Tav. XXXI. Latitudine *del Sole corrispondente ai tre argomenti* A, B, C.

Somma preparata colla tavola XXX.	A	B	C
	"	"	"
0	+0,10	+0,16	+0,24
50	+0,09	+0,10	+0,21
100	+0,07	+0,00	+0,08
150	+0,04	−0,11	−0,10
200	+0,00	−0,16	−0,21
250	−0,03	−0,14	−0,23
300	−0,06	−0,04	−0,11
350	−0,09	+0,07	+0,08
400	−0,11	+0,15	+0,21
450	−0,11	+0,16	+0,24
500	−0,10	+0,09	+0,13
550	−0,09	−0,02	+0,04
600	−0,06	−0,13	−0,20
650	−0,03	−0,16	−0,25
700	+0,01	−0,12	−0,16
750	+0,04	−0,02	+0,01
800	+0,07	+0,09	+0,17
850	+0,09	+0,15	+0,24
900	+0,11	+0,15	+0,18
950	+0,11	+0,07	+0,0[illegible]
1000	+0,10	−0,04	−0,08
1050	+0,08	−0,14	−0,25
1100	+0,05	−0,16	−0,20
1150	+0,02	−0,11	−0,07
1200	−0,01	−0,00	+0,13
1250	−0,05	+0,11	+0,23
1300	−0,08	+0,16	+0,21
1350	−0,10	+0,14	+0,04

TAV. XXXI. cont. Latitudine *del Sole corrispondente al quarto argomento* D.

Somma preparata colla Tav. XXX.			Latitudine del Sole			
			"			
0	136	272	+0,00−	136	272	408
2	138	274	+0,30−	134	270	406
4	140	276	+0,53−	132	268	404
6	142	278	+0,66−	130	266	402
8	144	280	+0,65−	128	264	400
10	146	282	+0,50−	126	262	398
12	148	284	+0,24−	124	260	396
14	150	286	−0,06+	122	258	394
16	152	288	−0,35+	120	256	392
18	154	290	−0,57+	118	254	390
20	156	292	−0,67+	116	252	388
22	158	294	−0,62+	114	250	386
24	160	296	−0,46+	112	248	384
26	162	298	−0,19+	110	246	382
28	164	300	+0,12−	108	244	380
30	166	302	+0,41−	106	242	378
32	168	304	+0,61−	104	240	376
34	170	306	+0,67−	102	238	374
36	172	308	+0,61−	100	236	372
38	174	310	+0,41−	98	234	370
40	176	312	+0,12−	96	232	368
42	178	314	−0,18+	94	230	366
44	180	316	−0,45+	92	228	364
46	182	318	−0,62+	90	226	362
48	184	320	−0,66+	88	224	360
50	186	322	−0,57+	86	222	358
52	188	324	−0,37+	84	220	356
54	190	326	−0,07+	82	218	354
56	192	328	+0,24−	80	216	352
58	194	330	+0,49−	78	214	350
60	196	332	+0,66−	76	212	348
62	198	334	+0,67−	74	210	346
64	200	336	+0,54−	72	208	344
66	202	338	+0,30−	70	206	342
68	204	340	+0,00−	68	204	340
			Latitudine del ☉	Somma preparata colla Tav. XXX.		

TAV. XXXII. *Fattori della* latitudine *del Sole trovata con la tav. XXXI.*

Giorno dell' anno	Fattore per l'Ascensione Retta	Fattore per la Declinazione	Giorni del mese	
0	−0,09	+1,00	Gennajo	1
10	−0,16	+0,99		10
20	−0,22	+0,98		21
30	−0,28	+0,96		31
40	−0,33	+0,95	Febb.	10
50	−0,36	+0,94		20
60	−0,38	+0,93	Marzo.	2
70	−0,39	+0,92		12
80	−0,40	+0,92		22
90	−0,39	+0,92	Aprile	1
100	−0,38	+0,93		11
110	−0,36	+0,94		21
120	−0,33	+0,95	Maggio	1
130	−0,29	+0,96		11
140	−0,23	+0,98		21
150	−0,17	+0,99		31
160	−0,10	+1,00	Giugno	10
170	−0,02	+1,00		20
180	+0,06	+1,00		30
190	+0,13	+0,99	Luglio	10
200	+0,20	+0,98		20
210	+0,26	+0,97		30
220	+0,31	+0,96	Agosto.	9
230	+0,34	+0,94		19
240	+0,37	+0,93		29
250	+0,39	+0,92	Settem.	8
260	+0,40	+0,92		18
270	+0,40	+0,92		28
280	+0,39	+0,92	Ottobre.	8
290	+0,37	+0,93		18
300	+0,35	+0,94		28
310	+0,31	+0,95	Novem.	7
320	+0,26	+0,97		17
330	+0,20	+0,98		27
340	+0,13	+0,99	Dicem.	7
350	+0,05	+1,00		17
360	−0,03	+1,00		27
365	−0,06	+1,00	Gennaio	0

La somma delle equazioncelle A, B, C, D darà la *latitudine* del Sole.
La latitudine moltiplicata per li fattori della tav. XXXII avuto riguardo ai segni, si applicherà all'AR. ed alla Decl. calcolate per convertirle nelle osservate. Se la Declinaz. del ☉ è australe si cambia il segno alla Lat. in Decl.

Tav. XXXIII. *Epoche e movimenti della* Longitudine media *del Sole, dell'*Apogeo *del Sole, e del* Nodo *Lunare per preparare gli argomenti dell'* Aberrazione *e della* Nutazione.

Epoche a mezzodì medio dei 31 Dic.	Longitudine media del Sole	Longitudine dell'Apogeo	Longitudine del Nodo ☾
	s o	s o	s o
1750 C	9. 9, 99	3. 8, 61	9.10, 33
1800 C	9. 9, 87	3. 9, 47	1. 3, 26
1900 C	9. 9, 65	3.11, 19	8.19, 12

In anni	Movimenti della Longitudine media ☉	della Longitudine Apogeo	del supplemento del ☊ Lunare
	s o	o	s o
1	11.29, 76	0, 02	11.10, 67
2	11.29, 52	0, 03	10.21, 34
3	11.29, 28	0, 05	10. 2, 01
B 4	0. 0, 03	0, 07	9.12, 63
5	11.29, 79	0, 09	8.23, 30
6	11.29, 55	0, 10	8. 3, 97
7	11.29, 31	0, 12	7.14, 65
B 8	0. 0, 06	0, 14	6.25, 26
9	11.29, 82	0, 15	6. 5, 93
10	11.29, 58	0, 17	5.16, 61
11	11.29, 34	0, 19	4.27, 28
B 12	0. 0, 09	0, 21	4. 7, 90
13	11.29, 85	0, 22	3.18, 57
14	11.29, 61	0, 24	2.29, 24
15	11.29, 38	0, 26	2. 9, 91
B 16	0. 0, 12	0, 28	1.20, 53
17	11.29, 88	0, 29	1. 1, 20
18	11.29, 64	0, 31	0.11, 87
19	11.29, 41	0, 33	11.22, 54
B 20	0. 0, 15	0, 34	11. 3, 16
B 40	0. 0, 31	0, 69	10. 6, 32
B 60	0. 0, 46	1, 03	9. 9, 48
B 80	0. 0, 61	1, 38	8.12, 64
B 100	0. 0, 77	1, 72	7.15, 81
C 100	11.29, 78	1, 72	7.15, 86

In giorni	Movimenti della Longitud. ☉	del suppl. del ☊ ☾
	s o	s o
1	0. 0, 99	11.29, 95
2	0. 1, 97	11.29, 89
3	0. 2, 96	11.29, 84
4	0. 3, 94	11.29, 79
5	0. 4, 93	11.29, 73
6	0. 5, 91	11.29, 68
7	0. 6, 90	11.29, 63
8	0. 7, 89	11.29, 58
9	0. 8, 87	11.29, 52
10	0. 9, 86	11.29, 47
20	0.19, 71	11.28, 94
30	0.29, 57	11.28, 41
40	1. 9, 43	11.27, 88
50	1.19, 28	11.27, 35
60	1.29, 14	11.26, 82
70	2. 9, 00	11.26, 29
80	2.18, 85	11.25, 76
90	2.28, 71	11.25, 23
100	3. 8, 57	11.24, 70
200	6.17, 13	11.19, 41
300	9.25, 69	11.14, 11

Li movimenti per gli anni e per li giorni si aggiungano all'epoche rispettive. La long. del Sole per un'altro meridiano, se a Ponente di Palermo si aumenti, se a Levante si diminuisca di 0,041 × diff. dei merid. in ore e decime.

Tav. XXXIV. Equazione dell'orbita *per convertire la Longitudine* ☉ *in ellittica.*

Argom. Long. ☉ — Long. Apogeo.

–	0°	10°	20°	30°	
segni	o	o	o	o	
O	0,00	0,24	0,41	0,59	XI
I	0,59	0,76	0,91	1,03	X
II	1,03	1,12	1,18	1,20	IX
III	1,20	1,19	1,14	1,05	VIII
IV	1,05	0,93	0,78	0,61	VII
V	0,61	0,42	0,41	0,00	VI
					segni
	30°	20°	10°	0°	+

L'equazione dell'Orbita si *sottragga* tra O e VI di Argom. si *aggiunga* tra VI e XII di Argom.

Tav, XXXV. *Aberrazione in Ascensione Retta.*

Arg. Ascensione Retta della stella, e Long. del Sole.

Long. ☉	0 / 180	10 / 190	20 / 200	30 / 210	40 / 220	50 / 230	
s s	"	"	"	"	"	"	s s
O 0 VI	−18,67+	−18,37+	−17,55+	−16,17+	−14,30+	−12,00+	VI 0 XII
10	−18,39+	−18,71+	−18,48+	−17,69+	−16,36+	−14,52+	20
20	−17,55+	−18,48+	−18,87+	−18,67+	−17,92+	−16,61+	10
I 0 VII	−16,17+	−17,69+	−18,67+	−19,10+	−18,91+	−18,19+	V 0 XI
10	−14,30+	−16,35+	−17,91+	−18,93+	−19,37+	−19,23+	20
20	−12,00+	−14,52+	−16,61+	−18,19+	−19,22+	−19,66+	10
II 0 VIII	− 9,34+	−12,25+	−14,80+	−16,88+	−18,48+	−19,50+	IV 0 X
10	− 6,38+	− 9,62+	−12,54+	−15,10+	−17,18+	−18,74+	20
20	− 3,25+	− 6,67+	− 9,91+	−12,83+	−15,37+	−17,44+	10
III 0 IX	− 0,00+	− 3,54+	− 6,96+	−10,18+	−13,09+	−15,59+	III 0 IX
10	+ 3,25−	− 0,28+	− 3,84+	− 7,22+	−10,40+	−13,28+	20
20	+ 6,38−	+ 2,97−	− 0,54+	− 4,03+	− 7,40+	−10,55+	10
IV 0 X	+ 9,34−	+ 6,13−	+ 2,74−	− 0,73+	− 4,17+	− 7,50+	II 0 VIII
10	+12,60−	+ 9,11−	+ 5,94−	+ 2,59−	− 0,83+	− 4,23+	20
20	+14,30−	+11,81−	+ 8,96−	+ 5,84−	+ 2,64−	− 0,82+	10
V 0 XI	+16,17−	+14,15−	+11,72−	+ 8,91−	+ 5,84−	+ 2,59−	I 0 VII
10	+17,55−	+16,06−	+14,11−	+11,72−	+ 8,65−	+ 5,94−	20
20	+18,39−	+17,49−	+16,07−	+14,16−	+11,83−	+ 9,11−	10
VI 0 XII	+18,67−	+18,38−	+17,55−	+16,17−	+14,30−	+12,00−	O 0 VI
	180 / 360	170 / 350	160 / 340	150 / 330	140 / 320	130 / 310	Long. ☉

siegue

Long. ☉	50 / 230	60 / 240	70 / 250	80 / 260	90 / 270	
s s	"	"	"	"	"	s s
O 0 VI	−12,00+	− 9,34+	− 6,38+	− 3,24+	− 0,00+	VI 0 XII
10	−14,52+	−12,25+	− 9,62+	− 6,69+	− 3,53+	20
20	−16,61+	−14,80+	−12,54+	− 9,90+	− 6,96+	10
I 0 VII	−18,19+	−16,89+	−15,10+	−12,83+	−10,18+	V 0 XI
10	−19,23+	−18,48+	−17,20+	−16,37+	−13,07+	20
20	−19,66+	−19,51+	−18,77+	−17,45+	−15,60+	10
II 0 VIII	−19,50+	−19,94+	−19,77+	−18,98+	−17,63+	IV 0 X
10	−18,74+	−19,76+	−20,15+	−19,94+	−19,14+	20
20	−17,44+	−18,98+	−19,95+	−20,30+	−20,65+	10
III 0 IX	−15,59+	−17,63+	−19,12+	−20,04+	−20,35+	III 0 IX
10	−13,28+	−15,74+	−17,73+	−19,18+	−20,05+	20
20	−10,55+	−13,38+	−15,79+	−17,73+	−19,14+	10
IV 0 X	− 7,50+	−10,59+	−13,38+	−15,74+	−17,63+	II 0 VIII
10	− 4,23+	− 7,50+	−10,63+	−13,28+	−15,59+	20
20	− 0,82+	− 4,18+	− 7,41+	−10,40+	−13,07+	10
V 0 XI	+ 2,59−	− 0,73+	− 4,03+	− 7,22+	−10,18+	I 0 VII
10	+ 5,94−	+ 2,74−	− 0,54+	− 3,82+	− 6,96+	20
20	+ 9,11−	+ 6,14−	+ 2,96+	− 0,28+	− 3,53+	10
VI 0 XII	+12,00−	+ 9,34−	+ 6,38−	+ 3,24−	+ 0,00−	O 0 VI
	130 / 310	120 / 300	110 / 290	100 / 280	90 / 270	Long. ☉

Moltiplicate per la *secante* della Declinazione.
Da 180° a 360° di AR. cambiate i segni della tavola.

Tav. XXXVI. *Aberrazione in Declinazione.* Prima parte.

Arg. Ascensione Retta della stella, e Long. del Sole.

Long. ☉	0 / 180	10 / 190	20 / 200	30 / 210	40 / 220	50 / 230	
s s	"	"	"	"	"	"	s s
O 0 VI	− 0,00+	+ 3,25−	+ 6,38−	+ 9,34−	+12,01−	+14,30−	XII 0 VI
10	− 3,63+	− 0,29+	+ 2,97−	+ 6,15−	+ 9,11−	+11,81−	20
20	− 6,96+	− 3,82+	− 0,56+	+ 2,74−	+ 5,96−	+ 8,96−	10
I 0 VII	−10,18+	− 7,22+	− 4,03+	− 0,73+	+ 2,60−	+ 5,84−	XI 0 V
10	−13,07+	−10,40+	− 7,40+	− 4,17+	− 0,83+	+ 2,54−	20
20	−15,60+	−13,27+	−10,54+	− 7,50+	− 4,23+	− 0,82+	10
II 0 VIII	−17,63+	−15,74+	−13,38+	−10,59+	− 7,50+	− 4,17+	X 0 IV
10	−19,14+	−17,73+	−15,80+	−13,38+	−10,54+	− 7,40+	20
20	−20,05+	−19,18+	−17,74+	−15,64+	−13,28+	−16,40+	10
III 0 IX	−20,35+	−20,04+	−19,13+	−17,63+	−15,60+	−13,08+	IX 0 III
10	−26,05+	−20,30+	−19,95+	−18,98+	−17,44+	−15,37+	20
20	−19,14+	−19,94+	−20,15+	−19,76+	−18,74+	−17,19+	10
IV 0 X	−17,63+	−18,98+	−19,76+	−19,94+	−19,50+	−18,48+	VIII 0 II
10	−15,60+	−17,46+	−18,17+	−19,50+	−19,67+	−19,22+	20
20	−13,07+	−15,38+	−17,20+	−18,48+	−19,23+	−19,37+	10
V 0 XI	−10,18+	−12,82+	−15,10+	−16,89+	−18,19+	−18,93+	VII 0 I
10	− 6,96+	− 9,90+	−12,54+	−14,80+	−16,61+	−17,91+	20
20	− 3,53+	− 6,67+	− 9,62+	−12,25+	−14,53+	−16,35+	10
VI 0 XII	− 0,00+	− 3,25+	− 6,38+	− 9,34+	−12,01+	−14,30+	VI 0 O
	180 / 360	170 / 350	160 / 340	150 / 330	140 / 320	130 / 310	Long. ☉

siegue

Long. ☉	50 / 230	[illegible]	70 / 250	80 / 260	90 / 270	
s s	"	"	"	"	"	s
O 0 VI	+14,30−	+16,17−	+17,55−	+18,38−	+18,63−	XII 0 VI
10	+11,81−	+14,16−	+16,07−	+17,50−	+18,39−	20
20	+ 8,96−	+11,72−	+14,11−	+16,07−	+17,55−	10
I 0 VII	+ 5,84−	+ 8,91−	+11,72−	+14,16−	+16,17−	XI 0 V
10	+ 2,54−	+ 5,84−	+ 8,95−	+11,82−	+14,30−	20
20	− 0,82+	+ 2,59−	+ 5,94−	+ 9,11−	+12,00−	10
II 0 VIII	− 4,17+	− 0,73+	+ 2,73−	+ 6,14−	+ 9,34−	X 0 IV
10	− 7,40+	− 4,03+	− 0,54+	+ 2,97−	+ 6,38−	20
20	−10,40+	− 7,22+	− 3,94+	− 0,28+	+ 3,25−	10
III 0 IX	−13,08+	−10,18+	− 6,96+	− 3,53+	− 0,00+	IX 0 III
10	−15,37+	−12,83+	− 9,90+	− 6,67+	− 3,25+	20
20	−17,19+	−15,10+	−12,54+	− 9,61+	− 6,38+	10
IV 0 X	−18,48+	−16,89+	−14,80+	−12,25+	− 9,34+	VIII 0 II
10	−19,22+	−18,19+	−16,61+	−14,52+	−12,00+	20
20	−19,37+	−18,93+	−17,90+	−16,35+	−14,30+	10
V 0 XI	−18,93+	−19,10+	−18,67+	−17,70+	−16,17+	VII 0 I
10	−17,91+	−18,67+	−18,87+	−18,49+	−17,55+	20
20	−16,35+	−17,69+	−18,49+	−18,72+	−18,39+	10
VI 0 XII	−14,30+	−16,17+	−17,55+	−18,38+	−18,66+	VI 0 O
	130 / 310	120 / 300	110 / 290	100 / 280	90 / 270	Long. ☉

Moltiplicate per il *seno* della Declinazione (Tav. XLVI).
Da 180 a 360 di AR. cambiate i segni della tavola.

Tav. XXXVII. *Aberrazione in Declinazione.* Seconda parte.

Arg. Long. del Sole, e Declinazione della stella.

Declinazione della stella	0ˢ − / VIˢ + / VIˢ + / XIIˢ −	Iˢ − / Vˢ + / VIIˢ + / XIˢ −	IIˢ − / IVˢ + / VIIIˢ + / Xˢ −	IIIˢ − / IIIˢ + / IXˢ + / IXˢ −
°	″	″	″	″
0	8,10	7,02	4,06	0,00
5	8,07	6,99	4,04	0,00
10	7,99	6,91	3,99	0,60
15	7,83	6,77	3,90	0,00
20	7,63	6,59	3,81	0,00
25	7,34	6,36	3,68	0,00
30	7,02	6,08	3,51	0,00
35	6,63	5,75	3,32	0,00
40	6,21	5,39	3,11	0,60
45	5,72	4,46	2,87	0,00
50	5,21	4,52	2,60	0,00
55	4,65	4,03	2,33	0,00
60	4,05	3,51	2,04	0,00
65	3,43	2,97	1,72	0,00
70	2,76	2,40	1,40	0,00
75	2,10	1,82	1,05	0,00
80	1,42	1,23	0,70	0,00
85	0,71	0,61	0,35	0,00
90	0,00	0,00	0,00	0,00

Cambiate li segni delle quantità se la Declinazione è australe.

Tav. XXXVIII. *Nutazione in AR.* Prima parte.

Arg. Longitudine del ☊

Gradi	0ˢ VIˢ − +	Iˢ VIIˢ − +	IIˢ VIIIˢ − +	
°	″	″	″	°
0	0,00	8,02	13,89	30
1	0,28	8,27	14,04	29
2	0,56	8,51	14,16	28
3	0,84	8,74	14,30	27
4	1,12	8,98	14,42	26
5	1,40	9,20	14,54	25
6	1,67	9,43	14,66	24
7	1,95	9,66	14,77	23
8	2,24	9,88	14,88	22
9	2,51	10,10	14,99	21
10	2,79	10,32	15,08	20
11	3,06	10,52	15,17	19
12	3,34	10,73	15,26	18
13	3,61	10,94	15,35	17
14	3,88	11,15	15,42	16
15	4,15	11,35	15,50	15
16	4,42	11,54	15,57	14
17	4,69	11,73	15,63	13
18	4,96	11,93	15,69	12
19	5,22	12,12	15,75	11
20	5,49	12,29	15,81	10
21	5,75	12,47	15,85	9
22	6,01	12,65	15,89	8
23	6,27	12,81	15,93	7
24	6,53	12,98	15,96	6
25	6,78	13,15	15,98	5
26	7,03	13,30	16,01	4
27	7,29	13,46	16,02	3
28	7,54	13,61	16,03	2
29	7,78	13,76	16,04	1
30	8,02	13,89	16,05	0
	− + Vˢ XIˢ	− + IVˢ Xˢ	− + IIIˢ IXˢ	Gradi

Moltiplicando per 1,09 le quantità date dalla tavola; oppure dividendole per *cos* obbliquità, si ha la Nutazione de' punti Equinoziali in Longitudine.

TAV. XXXIX. *Nutazione in AR.* Seconda parte.

Arg. Ascensione Retta della stella, e Longitudine del Nodo.

Lon. Nodo	0 180	10 190	20 200	30 210	40 220	50 230	
s s	″	″	″	″	″	″	s s
O 0 VI	− 9,36+	− 9,21+	− 8,80+	− 8,11+	− 7,18+	− 6,01+	VI 0 XII
10	− 9,21+	− 9,29+	− 9,08+	− 8,59+	− 7,83+	− 6,85+	20
20	− 8,80+	− 9,08+	− 9,08+	− 8,80+	− 8,27+	− 7,48+	10
I 0 VII	− 8,11+	− 8,59+	− 8,80+	− 8,79+	− 8,44+	− 7,88+	V 0 XI
10	− 7,17+	− 7,83+	− 8,27+	− 8,44+	− 8,37+	− 8,03+	20
20	− 6,02+	− 6,84+	− 7,48+	− 7,88+	− 8,04+	− 7,96+	10
II 0 VIII	− 4,69+	− 5,66+	− 6,46+	− 7,07+	− 7,47+	− 7,64+	IV 0 X
10	− 3,19+	− 4,30+	− 5,25+	− 6,04+	− 6,67+	− 7,07+	20
20	− 1,62+	− 2,80+	− 3,88+	− 4,85+	− 5,66+	− 6,30+	10
III 0 IX	− 0,00+	− 1,22+	− 2,39+	− 3,48+	− 4,48+	− 5,35+	III 0 IX
10	+ 1,62−	+ 0,41−	− 0,83+	− 2,02+	− 3,17+	− 4,21+	20
20	+ 3,19−	+ 2,03−	+ 0,77−	− 0,50+	− 1,76+	− 2,95+	10
IV 0 X	+ 4,69−	+ 3,56−	+ 2,33−	+ 1,04−	− 0,30+	− 1,61+	II 0 VIII
10	+ 6,02−	+ 5,00−	+ 3,83−	+ 2,54−	+ 1,19−	− 0,23+	20
20	+ 7,17−	+ 6,29−	+ 5,21−	+ 3,96−	+ 2,62−	+ 1,18−	10
V 0 XI	+ 8,11−	+ 7,37−	+ 6,43−	+ 5,28−	+ 3,97−	+ 2,54−	I 0 VII
10	+ 8,80−	+ 8,24−	+ 7,45−	+ 6,43−	+ 5,20−	+ 3,83−	20
20	+ 9,21−	+ 8,86−	+ 8,25−	+ 7,37−	+ 6,28−	+ 5,00−	10
VI 0 XII	+ 9,36−	+ 9,21−	+ 8,80−	+ 8,11−	+ 7,18−	+ 6,01−	O 0 VI
	180 360	170 350	160 340	150 330	140 320	130 310	Lon. Nodo

siegue

Lon. Nodo	50 230	60 240	70 250	80 260	90 270	
s s	″	″	″	″	″	s s
O 0 VI	− 6,01+	− 4,69+	− 3,19+	− 1,63+	− 0,00+	VI 0 XII
10	− 6,85+	− 5,66+	− 4,27+	− 2,80+	− 1,21+	20
20	− 7,48+	− 6,46+	− 5,25+	− 3,88+	− 2,38+	10
I 0 VII	− 7,88+	− 7,07+	− 6,04+	− 4,85+	− 3,48+	V 0 XI
10	− 8,03+	− 7,47+	− 6,66+	− 5,66+	− 4,48+	20
20	− 7,96+	− 7,63+	− 7,06+	− 6,30+	− 5,34+	10
II 0 VIII	− 7,64+	− 7,56+	− 7,27+	− 6,76+	− 6,03+	IV 0 X
10	− 7,07+	− 7,27+	− 7,25+	− 6,97+	− 6,55+	20
20	− 6,30+	− 6,76+	− 6,99+	− 7,03+	− 6,86+	10
III 0 IX	− 5,35+	− 6,63+	− 6,55+	− 6,8[illegible]+	− 6,97+	III 0 IX
10	− 4,21+	− 5,13+	− 5,90+	− 6,48+	− 6,86+	20
20	− 2,95+	− 4,08+	− 5,06+	− 5,89+	− 6,55+	10
IV 0 X	− 1,61+	− 2,89+	− 4,07+	− 5,14+	− 6,03+	II 0 VIII
10	− 0,23+	− 1,61+	− 2,96+	− 4,20+	− 5,34+	20
20	+ 1,18−	− 0,29+	− 1,76+	− 3,16+	− 4,48+	10
V 0 XI	+ 2,54−	+ 1,04−	− 0,51+	− 2,03+	− 3,48+	I 0 VII
10	+ 3,83−	+ 2,33−	+ 0,78−	− 0,83+	− 2,38+	20
20	+ 5,00−	+ 3,56−	+ 2,03−	+ 0,40−	− 1,21+	10
VI 0 XII	+ 6,01−	+ 4,69−	+ 3,19−	+ 1,63−	+ 0,00−	O 0 VI
	130 310	120 300	110 290	100 280	90 270	Lon. Nodo

Moltiplicate per la *tangente* della Declinazione (Tav. XLVI).

Cambiate i segni della tavola { se la Declinazione è *australe* da 0° a 180° di AR.
se la Declinazione è *boreale* da 180° a 360° di AR.

TAV. XL. *Nutazione in Declinazione.*

Arg. Ascensione Retta della stella, e Long. del Nodo.

Lon. Nodo	0 / 180	10 / 190	20 / 200	30 / 210	40 / 220	50 / 230	
s s	"	"	"	"	"	"	s s
O o VI	+ 0,00-	+ 1,63-	+ 3,19-	+ 4,49-	+ 6,01-	+ 7,18-	XII o VI
20	- 1,21+	+ 0,40-	+ 2,03-	+ 3,56-	+ 5,00-	+ 6,28-	20
10	- 2,38+	- 0,83+	+ 0,78-	+ 2,33-	+ 3,83-	+ 5,20-	10
I o VII	- 3,48+	- 2,03+	- 0,51+	+ 1,04-	+ 2,54-	+ 3,97-	XI o V
10	- 4,48+	- 3,16+	- 1,76+	- 0,29+	+ 1,18-	+ 2,62-	20
20	- 5,34+	- 4,20+	- 2,96+	- 1,61+	- 0,23+	+ 1,19-	10
II o VIII	- 6,03+	- 5,14+	- 4,07+	- 2,89+	- 1,61+	- 0,30+	X o IV
10	- 6,55+	- 5,89+	- 5,06+	- 4,08+	- 2,95+	- 1,76+	20
20	- 6,86+	- 6,48+	- 5,90+	- 5,13+	- 4,21+	- 3,17+	10
III o IX	- 6,97+	- 6,86+	- 6,55+	- 6,03+	- 5,35+	- 4,48+	IX o III
10	- 6,86+	- 7,03+	- 6,99+	- 6,76+	- 6,30+	- 5,66+	20
20	- 6,55+	- 6,97+	- 7,25+	- 7,27+	- 7,07+	- 6,67+	10
IV o X	- 6,03+	- 6,76+	- 7,27+	- 7,56+	- 7,64+	- 7,47+	VIII o II
10	- 5,34+	- 6,30+	- 7,06+	- 7,63+	- 7,96+	- 8,04+	20
20	- 4,48+	- 5,66+	- 6,66+	- 7,47+	- 8,03+	- 8,37+	10
V o XI	- 3,48+	- 4,85+	- 6,04+	- 7,07+	- 7,88+	- 8,44+	VII o I
10	- 2,38+	- 3,88+	- 5,25+	- 6,46+	- 7,48+	- 8,27+	20
20	- 1,21+	- 2,80+	- 4,27+	- 5,66+	- 6,85+	- 7,83+	10
VI o XII	- 0,00+	- 1,63+	- 3,19+	- 4,69+	- 6,01+	- 7,18+	VI o O
	180 / 360	170 / 350	160 / 340	150 / 330	140 / 320	130 / 310	Lon. Nodo

siegue

Lon. Nodo	50 / 230	60 / 240	70 / 250	80 / 260	90 / 270	
s s	"	"	"	"	"	s s
O o VI	+ 7,18-	+ 8,11-	+ 8,80-	+ 9,21-	+ 9,36-	XII o VI
10	+ 6,28-	+ 7,37-	+ 8,25-	+ 8,86-	+ 9,21-	20
20	+ 5,20-	+ 6,43-	+ 7,45-	+ 8,24-	+ 8,80-	10
I o VII	+ 3,97-	+ 5,28-	+ 6,43-	+ 7,37-	+ 8,11-	XI o V
10	+ 2,62-	+ 3,96-	+ 5,21-	+ 6,29-	+ 7,17-	20
20	+ 1,19-	+ 2,54-	+ 3,83-	+ 5,00-	+ 6,02-	10
II o VIII	- 0,30+	+ 1,04-	+ 2,33-	+ 3,56-	+ 4,69-	X o IV
10	- 1,76+	- 0,50+	+ 0,77-	+ 2,03-	+ 3,19-	20
20	- 3,17+	- 2,02+	- 0,83+	+ 0,41-	+ 1,62-	10
III o IX	- 4,48+	- 3,48+	- 2,30+	- 1,22+	- 0,00+	IX o III
10	- 5,66+	- 4,85+	- 3,88+	- 2,80+	- 1,62+	20
20	- 6,67+	- 6,04+	- 5,25+	- 4,30+	- 3,19+	10
IV o X	- 7,47+	- 7,07+	- 6,46+	- 5,66+	- 4,69+	VIII o II
10	- 8,04+	- 7,88+	- 7,48+	- 6,84+	- 6,02+	20
20	- 8,37+	- 8,44+	- 8,27+	- 7,83+	- 7,17+	10
V o XI	- 8,44+	- 8,77+	- 8,80+	- 8,59+	- 8,11+	VII o I
10	- 8,27+	- 8,80+	- 9,08+	- 9,08+	- 8,80+	20
20	- 7,83+	- 8,59+	- 9,08+	- 9,29+	- 9,21+	10
IV o XII	- 7,18+	- 8,11+	- 8,80+	- 9,21+	- 9,36+	VI o O
	130 / 310	120 / 300	110 / 290	100 / 280	90 / 270	Lon. Nodo

Cambiate i segni della tavola { se la Declinazione è *australe* da 0° a 180° di AR.
se la Declinazione è *boreale* da 180° a 360° di AR.

Tav. XLI. *Nutazione Solare in AR.* Prima parte.

Arg. Longitudine del Sole.

Long. ☉	Nutaz.	Long. ☉
s s	"	s s
O o VI	-0,00+	VI o XII
15	-0,37+	15
I o V	-0,64+	VII o XI
15	-0,94+	15
II o IV	-0,64+	VIII o X
15	-0,37+	15
III o III	-0,00+	IX o IX

Tav. XLII. *Nutazione Solare in AR.* Seconda parte.

Arg. Longitudine del Sole, ed AR. della Stella.

Long. ☉	0 / 180	30 / 210	60 / 240	90 / 270	
s s	"	"	"	"	s s
O o III	-0,43+	-0,38+	-0,22+	-0,00+	VI o IX
10	-0,41+	-0,41+	-0,30+	-0,11+	10
20	-0,33+	-0,39+	-0,35+	-0,21+	20
I o IV	-0,22+	-0,33+	-0,35+	-0,28+	VII o X
10	-0,08+	-0,23+	-0,31+	-0,32+	10
20	+0,08-	-0,09+	-0,24+	-0,32+	20
II o V	+0,22-	+0,05-	-0,13+	-0,28+	VIII o XI
10	+0,33-	+0,18-	-0,01+	-0,21+	10
20	+0,41-	+0,30-	+0,11-	-0,11+	20
III o VI	+0,43-	+0,38-	+0,12-	-0,00+	IX o XII
	180 / 360	150 / 330	120 / 300	90 / 270	Long. ☉

Moltiplicate per la *tangente* della Declinazione.

Cambiate i segni della tavola { per le stelle *australi* da 0 a 180. per le stelle *boreali* da 180 a 360.

Tav. XLIII. *Nutazione Solare in Declinazione.*

Arg. Longitudine del Sole, ed AR. della Stella.

Long. ☉	0 / 180	30 / 210	60 / 240	90 / 270	
s s	"	"	"	"	s s
O o III	- 0,00+	+ 0,22-	+ 0,38-	+ 0,43-	VI o IX
10	- 0,11+	+ 0,11-	+ 0,30-	+ 0,41-	10
20	- 0,21+	- 0,01+	+ 0,18-	+ 0,33-	20
I o IV	- 0,28+	- 0,13+	+ 0,05-	+ 0,22-	VII o X
10	- 0,32+	- 0,24+	- 0,09+	+ 0,08+	10
20	- 0,32+	- 0,31+	- 0,23+	- 0,08+	20
II o V	- 0,28+	- 0,35+	- 0,33+	- 0,22+	VIII o XI
10	- 0,21+	- 0,35+	- 0,39+	- 0,33+	10
20	- 0,14+	- 0,30+	- 0,41+	- 0,41+	20
III o VI	- 0,00+	- 0,22+	- 0,38+	- 0,43+	IX o XII
	180 / 360	150 / 330	120 / 300	90 / 270	Long. ☉

Cambiate i segni della tav. { per le declinazioni *australi* da 0 a 180 di AR. per le declinazioni *boreali* da 180 a 360 di AR.

Tav. XLIV. ***Precessione annua in Ascensione Retta, e in Declinazione.***

Arg. per la Prec. in AR...... Ascensione retta della stella.
Arg per la Prec. in Declinazione...... Ascensione retta della stella + 90°.
Se l'argomento è maggiore di 180° si sottraggano 180 dal medesimo.

Argomento	Fattore per l'AR è Precessione per la decl.	Differenza per 60′		Argomento	Fattore per l'AR e Precessione per la decl.	Differenza per 60′		Argomento	Fattore per l'AR e Precessione per la decl.	Differenza per 60′	
°	″	″	°	°	″	″	°	°	″	″	°
0	0,000	0,349	180	30	10,016	0,301	150	60	17,348	0,172	120
1	0,349	0,351	179	31	10,317	0,299	149	61	17,520	0,167	119
2	0,700	0,348	178	32	10,616	0,294	148	62	17,687	0,162	118
3	1,048	0,349	177	33	10,910	0,293	147	63	17,849	0,156	117
4	1,397	0,349	176	34	11,203	0,288	146	64	18,005	0,151	116
5	1,746	0,348	175	35	11,491	0,284	145	65	18,156	0,145	115
6	2,094	0,348	174	36	11,775	0,281	144	66	18,301	0,140	114
7	2,442	0,347	173	37	12,056	0,277	143	67	18,441	0,134	113
8	2,789	0,345	172	38	12,333	0,274	142	68	18,575	0,128	112
9	3,134	0,344	171	39	12,607	0,270	141	69	18,703	0,122	111
10	3,478	0,344	170	40	12,877	0,266	140	70	18,825	0,117	110
11	3,822	0,344	169	41	13,143	0,262	139	71	18,942	0,110	109
12	4,166	0,341	168	42	13,405	0,257	138	72	19,052	0,106	108
13	4,507	0,339	167	43	13,662	0,253	137	73	19,158	0,100	107
14	4,846	0,339	166	44	13,915	0,249	136	74	19,258	0,092	106
15	5,185	0,337	165	45	14,164	0,246	135	75	19,350	0,088	105
16	5,522	0,335	164	46	14,410	0,241	134	76	19,438	0,082	104
17	5,857	0,334	163	47	14,651	0,236	133	77	19,520	0,076	103
18	6,191	0,331	162	48	14,887	0,231	132	78	19,596	0,069	102
19	6,522	0,329	161	49	15,118	0,228	131	79	19,665	0,064	101
20	6,851	0,328	160	50	15,346	0,222	130	80	19,729	0,057	100
21	7,179	0,325	159	51	15,568	0,217	129	81	19,786	0,052	99
22	7,504	0,323	158	52	15,785	0,213	128	82	19,838	0,046	98
23	7,827	0,321	157	53	15,998	0,209	127	83	19,884	0,040	97
24	8,148	0,318	156	54	16,207	0,202	126	84	19,924	0,032	96
25	8,466	0,316	155	55	16,409	0,198	125	85	19,956	0,028	95
26	8,782	0,313	154	56	16,607	0,194	124	86	19,984	0,021	94
27	9,095	0,310	153	57	16,801	0,188	123	87	20,005	0,015	93
28	9,405	0,307	152	58	16,989	0,182	122	88	20,020	0,009	92
29	9,712	0,304	151	59	17,171	0,177	121	89	20,029	0,004	91
30	10,016		150	60	17,348		120	90	20,033		90
			Argom.				Argom.				Argom.

1° Precessione in AR = 46,030 ± quantità trovata × *tangente* Declinazione............
da 0° a 180° di AR. + se la Declinazione è *boreale*: — se la Declinazione è *austr*
da 180° a 360° di AR. + se la Declinazione è *australe*: — se la Declinazione è *borea*

2° Per avere la Precessione in Declinazione si aggiungano 90° all' AR. della stella; e quantità trovata nella tavola sarà la cercata precessione: la quale da 0° a 180° dell'Ar mento fa crescere le Declinazioni Boreali, e diminuire le Australi, e da 180° a 360° c l'Argomento fa il contrario. Generalmente nel 1° e 4° quadrante di AR. la precessi avvicina le stelle al Polo Boreale, e ne le allontana nel 2° e 3°.

Tav. XLV. Secanti *per calcolare colla tav. XXXVI l' Aberrazione in Alt.*

Gradi	Secante	Gradi	Secante	Gradi	Secante	Gradi	Secante	Gradi	Secante	Gradi	Secante
0°	1,000	15°	1,035	30°	1,155	45°	1,414	60°	2,000	75°	3,864
1	1,000	16	1,040	31	1,167	46	1,440	61	2,063	76	4,134
2	1,001	17	1,046	32	1,179	47	1,466	62	2,130	77	4,445
3	1,001	18	1,051	33	1,192	48	1,494	63	2,203	78	4,810
4	1,002	19	1,058	34	1,206	49	1,524	64	2,281	79	5,241
5	1,004	20	1,064	35	1,221	50	1,556	65	2,366	80	5,759
6	1,006	21	1,071	36	1,236	51	1,589	66	2,459	81	6,392
7	1,008	22	1,079	37	1,252	52	1,624	67	2,559	82	7,185
8	1,010	23	1,086	38	1,269	53	1,662	68	2,669	83	8,206
9	1,012	24	1,095	39	1,287	54	1,701	69	2,790	84	9,567
10	1,015	25	1,103	40	1,305	55	1,743	70	2,924	85	11,474
11	1,019	26	1,113	41	1,325	56	1,788	71	3,072	86	14,336
12	1,022	27	1,122	42	1,346	57	1,837	72	3,236	87	19,107
13	1,026	28	1,133	43	1,367	58	1,887	73	3,420	88	28,654
14	1,031	29	1,143	44	1,390	59	1,942	74	3,628	89	57,299
15	1,035	30	1,155	45	1,414	60	2,000	75	3,864	90	infinita

Tav. XLVI. Seni *per calcolare colla tav. XXXVI la* prima parte *dell' Aberrazione in Declinazione.*

Gradi	Seno	Gradi	Seno	Gradi	Seno	Gradi	Seno	Gradi	Seno	Gradi	Seno
0°	0,000	15°	0,259	30°	0,500	45°	0,707	60°	0,866	75°	0,966
1	0,017	16	0,276	31	0,515	46	0,719	61	0,875	76	0,970
2	0,035	17	0,292	32	0,530	47	0,731	62	0,883	77	0,974
3	0,052	18	0,309	33	0,545	48	0,743	63	0,891	78	0,978
4	0,070	19	0,326	34	0,559	49	0,755	64	0,899	79	0,982
5	0,087	20	0,342	35	0,575	50	0,766	65	0,906	80	0,985
6	0,105	21	0,358	36	0,588	51	0,777	66	0,914	81	0,988
7	0,122	22	0,375	37	0,602	52	0,788	67	0,921	82	0,990
8	0.139	23	0,391	38	0,616	53	0,799	68	0,927	83	0,993
9	0,156	24	0,407	39	0,629	54	0,809	69	0,934	84	0,995
10	0,174	25	0,423	40	0,643	55	0,819	70	0,940	85	0,996
11	0,191	26	0,438	41	0,656	56	0,829	71	0,946	86	0,998
12	0,208	27	0,454	42	0,669	57	0,839	72	0,951	87	0,999
13	0,225	28	0,469	43	0,682	58	0,848	73	0,956	88	0,999
14	0,242	29	0,485	44	0,695	59	0,857	74	0,961	89	1,000
15	0,259	30	0,500	45	0,707	60	0,866	75	0,966	90	1,000

TAV. XLVII. Tangenti, *per calcolare colla tav. XXXIX, e XLII le* seconde parti *della Nutazione in AR. e colla tav. XLIV il* secondo termine *della Precessione in AR.*

Gradi	Tangente	Gradi	Tangente	Gradi	Tangente	Gradi	Tangente	Gradi	Tangente	Gradi	Tangente
0°	0,000	15°	0,268	30°	0,577	45°	1,000	60°	1,732	75°	3,732
1	0,017	16	0,287	31	0,601	46	1,036	61	1,804	76	4,011
2	0,035	17	0,306	32	0,625	47	1,072	62	1,881	77	4,331
3	0,052	18	0,325	33	0,649	48	1,111	63	1,963	78	4,705
4	0,070	19	0,344	34	0,675	49	1,150	64	2,050	79	5,145
5	0,087	20	0,364	35	0,700	50	1,192	65	2,145	80	5,671
6	0,105	21	0,384	36	0,727	51	1,235	66	2,246	81	6,314
7	0,123	22	0,404	37	0,754	52	1,280	67	2,356	82	7,115
8	0,141	23	0,424	38	0,781	53	1,327	68	2,475	83	8,144
9	0,158	24	0,445	39	0,810	54	1,376	69	2,605	84	9,514
10	0,176	25	0,466	40	0,839	55	1,428	70	2,747	85	11,430
11	0,194	26	0,488	41	0,869	56	1,483	71	2,904	86	14,307
12	0,213	27	0,510	42	0,900	57	1,540	72	3,078	87	19,081
13	0,231	28	0,532	43	0,932	58	1,600	73	3,271	88	28,636
14	0,249	29	0,554	44	0,966	59	1,664	74	3,487	89	57,290
15	0,268	30	0,577	45	1,000	60	1,732	75	3,732	90	infinità

TAV. XLVIII. Fattori *della Precessione annua in AR. e in Declinazione corrispondenti ai giorni del mese, per calcolarne la parte proporzionale ai giorni dell'anno.*

Gennaio g	
1	0,01
3	0,02
6	0,03
9	0,04
12	0,05
15	0,06
19	0,07
22	0.08
25	0,09
28	0,10

Febbraio	
1	0,11
4	0,12
8	0,13
12	0,14
16	0,15
21	0,16
25	0,17

Marzo g	
2	0,18
7	0.19
12	0,20
17	0,21
22	0,22
27	0,23

Aprile	
1	0,24
6	0,25
11	0,26
15	0,27
20	0,28
24	0,29
28	0,30

Maggio	
2	0,31
5	0,32
9	0,33

Maggio g	
12	0,34
16	0,35
19	0,36
22	0,37
25	0,38
28	0,39
31	0,40

Giugno	
3	0,41
6	0,42
9	0,43
12	0,44
15	0,45
18	0,46
21	0,47
24	0,48
27	0,49
29	0,50

Luglio g	
2	0,51
5	0,52
8	0,53
11	0,54
14	0,55
17	0,56
20	0,57
23	0,58
27	0,59
30	0,60

Agosto	
3	0,61
6	0,62
10	0,63
14	0,64
18	0,65
22	0,66
26	0,67
30	0,68

Settembre g	
4	0,69
9	0,70
14	0,71
19	0,72
24	0,73
29	0,74

Ottobre	
4	0,75
9	0,76
14	0,77
18	0,78
23	0,79
27	0,80
31	0,81

Novembre	
4	0,82
8	0,83
11	0,84

Novembre g	
15	0,85
18	0,86
21	0,87
24	0,88
27	0,89
30	0,90

Dicembre	
3	0,91
6	0,92
9	0,93
12	0,94
15	0,95
18	0,96
21	0,97
23	0,98
26	0,99
29	1,00
31	1,01

USO DELLE TAVOLE

TAV. I. — XI.

Le prime otto tavole non hanno bisogno nè di spiegazione nè di esempj. Sono in esse riunite le espressioni più commode e di maggiore uso, che secondo le occorrenze si sostituiscono nelle formole, onde colle dovute trasformazioni ridurle allo stato in cui si vogliono. Li numeri sulla destra indicano li § della Goniometria.

Nella tav. IX si contengono le espressioni analitiche di una parte del triangolo in tre delle altre. In essa le formole 37 e seguenti, per li precetti dati al § 184 possono mettersi ciascuna in due altri aspetti.

Le tavole X e XI presentano le formole più commode e più brevi per la soluzione de' triangoli secondo i diversi casi. Non sono espresse rapporto a nissuna figura, ma nella maniera più generale e più utile alla pratica.

TAV. XII.

1. Si cercano le parti del raggio corrispondenti a 232°. 47' 34",28 della circonferenza

TAV. XII..........	per gradi...	210.........	3,6651914
		22.........	0,3839724
	per minuti..	40.........	0,0116355
		7.........	0,0020362
	per secondi.	30.........	0,0001454
		4.........	0,0000194
	per	0", 2.................	0,0000010
		0 ,08..................	0,0000004

A 232°.47'.34",28 corrispondono raggi... 4,0630017

2. Quando non si voglia far uso della tavola si riducano li minuti e secondi dell'arco dato in decimali di grado, e si moltiplichino per il n.° 0,0174533; che è il valore del grado in parti del raggio, ed il cui *log.* è 8.2418774. Questo logaritmo è il complemento del log. dell'arco uguale al raggio. Così

log. 132°.47.34,28 = log. 232°,79285 = 2.3669695
log. costante.................................... 8.2418774

log. 4,06300....................................... 0.6088469

3. Il problema inverso, cioè quello di convertire le parti del raggio in gradi non è così frequente. Per risolverlo si moltiplichi l'arco uguale al raggio, cioè 57°,29578 per le parti date del raggio; e li decimali del prodotto colla successiva moltiplicazione per 60 si riducano in minuti, e secondi. Il logaritmo di 57°,29578 è 1.7581226.

Coi dati precedenti

log costante.................................... 1.7581226
parti date del raggio 4,063... log...... 0.6088469

n.° 232°,79285.............. 2.3669695

colla successiva moltiplicazione dei decimali per 60 si ha

232°,79285 = 232°.47',571 = 232°.47'.34",28

TAV. XIII.

Ai 22 aprile 1837 il passaggio del Sole al meridiano fu osservato a 2h 2'. 39",04 del pendolo regolato sul tempo sidereo. Dopo qualche tempo, cioè mentre il pendolo segnava 7h. 16',0,0 un cronometro regolato sul tempo medio diede nel confronto 5h. 15'. 27",8, si cerca il tempo medio, e l'avanzo e ritardo del cronometro.

Tempo del pendolo nel confronto... 7h. 16'.0", 0
Passaggio del Sole osservato.......... 2. 2.39,04

differenza,...................... 5. 13.20,96

differenza ... *prec*......... 5. 13. 20,96

Riduzione

Tav. XIII........... per 5^h ...	$49''$,148	}	— 51,34
per 13′ ...	2,130		
per 20 ...	0,055		
per 0,9 ...	0,002 5		
per 0,06...	0,000 16		
	51,336		

differenza in tempo medio... 5. 12. 29,62
Cronometro nel confronto............. 5. 15. 27,80

Tempo del Cron. a mezzodì vero... 0. 2. 58,18
Tempo medio a mezzodì vero........ 0. 3. 57,70

Ritardo del Cron. sul tempo medio. — 59,52

Tav. XIV.

Ai 22 aprile 1837 col cronometro regolato sul tempo medio fu osservata l'occultazione di una stella a 6^h 24′. 19″,5, si vuole il tempo sidereo corrispondente.

Osservazione 6.24.19, 5
Ritardo del Cronometro conosciuto... + 59,52

Tempo medio dell'osservazione........ 6.25.19,02
Tempo medio del mezzodì vero....... 0. 3.57,70

differenza.............................. 6.21.21,32

Riduzione

Tav. XIV.......... per 6^h ...	59,139	}	+ 1. 2,65
per 21′ ...	3,451		
per 21″ ...	0,057		
per 0,3 ...	0,000 8		
per 0,02...	0,000 05		
	1. 2,648		

differenza in tempo sidereo... 6.22.23,97

differenza in tempo sidereo ... *prec.* ... 6.22.23,97
Ascens. retta del Sole a mezzodì vero. 1.59.37,01

Tempo sidereo dell'osservazione....... 8.22..0,98

TAV. XV.

Delli tre errori che affettano la deviazione dello stromento de' passaggi, il più influente è quello che produce la deviazione azimutale; gli altri si correggono quasi sempre coi mezzi meccanici, inerenti allo stromento, quando è ben costruito.

1. Conosciuta la *deviazione azimutale* dello stromento, o sia l'angolo del verticale da esso descritto col meridiano, si ottiene la correzione del passaggio di un'astro sempre uguale alla *deviazione azimutale* moltiplicata per un *fattore*; il quale si compône del seno della distanza dell' Astro del Zenit, diviso per il coseno della sua declinazione. La tavola XV da questi *fattori*: li quali per le stelle troppo vicine al polo, quando si voglia una gran precisione, conviene meglio calcolarli direttamente colla formola.

2. Gli argomenti della tavola sono la declinazione dell'Astro, e la sua distanza dal Zenit. Conoscendosi la declinazione D della stella, e la latitudine L dell'osservatore si ha subito la distanza dal Zenit Z, perchè sarà

Per le stelle tra il Zenit e l'Equatore. $Z = L - D$
tra l'equatore e l'orizzonte. $Z = L + D$
tra il Zenit ed il polo.... $Z = D - L$
sotto il polo............... $Z = 180 - (L + D)$

Esempio

3. Ai 22 aprile 1837 in Palermo, la di cui altezza del polo L è 38.6.44, furono osservati li passaggi superiore ed inferiore della Polare, la di cui declinazione D era 88°.26'.21''. Si cercano li *fattori* della deviazione azimutale corrispondenti alle due osservazioni.

Per l'osservazione sopra il polo
log. sen Z = log. sen $(D-L)$ 9.8863214
co-log. cos D 1.5648199

fattore sopra il polo...28,258...log. fattore 1.4697101

Per l'osservazione sotto il polo

log. sen Z = log. sen $(180 - (L+D))$... 9.9048902
co-log. cos D.................................... 1.5648199

fattore sotto il polo... 29,492... log. fattore 1.4697101

La tavola avrebbe dato rigorosamente *fattore* sopra il polo 28,315 : *fattore* sotto li polo 29,464.

4. Nelle tavole a doppia entrata, dipendenti da due argomenti uno che va da sinistra a destra, e l'altro dall'alto in basso, il numero cercato, che corrisponde ai due argomenti dati, quando non si vuol tener conto delle seconde differenze, dipende da quattro quantità contigue nella tavola, dentro le quali devono cadere le parti proporzionali ai due argomenti. Siano a, b due delle quattro quantità che stanno sulla linea orizzontale; c, d le prossime nella seguente orizzontale; onde a, c restano l'una sotto l'altra nella linea verticale; b, d l'una sotto l'altra nella seguente verticale a destra. Sia pure n la differenza d'indicazione dell'argomento orizzontale ed n' la differenza di indicazione dell'argomento verticale. Sia p la differenza tra l'argomento orizzontale dato, e il prossimo a sinistra indicato nella tavola, e q la differenza tra l'argomento dato ed il prossimo superiore indicato nella tavola. Chiamata x la quantità cercata, proporzionale ai due argomenti dati, qual modo abbreviativo e pratico di pigliare le parti proporzionali si ha

$$x = a \pm \frac{p}{n}(a \backsim b) \pm \frac{q}{n'}(a \backsim c) \pm \frac{pq}{nn'}\Big((c \backsim d) - (a \backsim b)\Big)$$

$+$ quando le quantità crescono nel senso dell'argomento,
$-$ quando diminuiscono.

Quando le differenze son piccole si può trascurare il termine moltiplicato per $\frac{pq}{nn'}$.

5. Nel caso dato della Polare, essendo $D = 88°.26'.21'' = 88°.26',35$: e pel passaggio superiore $Z = 50.19.37 = 50°,327$, nella tavola si ha; $a = 26,338$, $b = 29,776$, $c = 29,264$, $d = 33,084$. Di più $n = 60° - 50° = 10$, $n' = 88°.30' - 88°.20' = 10$; $p = Z - 50° = 0,327$: $q = D - 88°.20' = 6',35$

onde $$\frac{p}{n} = 0,0327 \ldots \frac{q}{n'} = 0,635$$

eseguiti i calcoletti si trova $x = 28,315$.
Per il fattore inferiore

$$Z = 53.26.55 = 53^{\circ},448;\ p = Z - 50^{\circ} = 3,448$$

onde $\frac{p}{n} = 0,3448;\ \frac{pq}{nn'} = 0,021.$

le altre quantità restano come sopra. Eseguiti i calcoletti si trova $x = 29,464$.

6. Sviluppando il seno della distanza dal Zenit nelle funzioni della Declinazione e della Latitudine per ogni Osservatorio fisso si tesse una tavola più maneggevole, che ha per argomento la sola declinazione, e la di cui formola è sen $L \mp \cos L \tan D$.

Tav. XVI.

In questa tavola oltre la corrispondenza de' giorni dell'anno colla longitudine del sole, si ha il semidiametro del sole in arco: il tempo *medio* del passaggio dello stesso semidiametro al meridiano, il quale si converte in tempo *sidereo* aggiungendovi 0'',2 in tempo: e finalmente i moti orarj in *AR* e in declinazione. Quantità tutte di cui si fa continuo uso.

Tav. XVII, XVIII e XIX.

Nelle osservazioni delle distanze dal Zenit del Sole si mette sotto il filo uno dei bordi prima del passaggio al meridiano del punto di contatto, onde trovarsi a tempo di mettere sotto il filo l'altro bordo ancora. Onde le Distanze così osservate saranno maggiori della precisa Distanza meridiana. Il loro eccesso si ha nella tavola XVII, dopo averne moltiplicata la quantità ivi trovata per il fattore della tavola XVIII.

Per le stelle, e per qualunque astro, quando si mettono sotto il filo prima o dopo del loro passaggio, ha luogo sempre tale correzione, la quale è additiva solamente alle distanze osservate tra il polo e l'orizzonte. Li *fattori* della tav. XVIII servono per le osservazioni meridiane al Sud del Zenit, e quelli della tav. XIX per le osservazioni meridiane al Nord del Zenit.

Tav. XX e XXI.

Questa tavola delle Rifrazioni, il di cui argomento è la Distanza osservata dal Zenit, è quella stessa del sig. Ivory, inserita nelle tavole del sig. Baily, e calcolata su la formola del La Place. A questa va unita la tavola XXI, la quale fu stampata nella pagina susseguente; e in cui si ha la serie addizionale del La Place per le rifrazioni al di la di 74°. Gli argomenti di questa seconda tavola sono il termometro di Fahrenheit osservato diminuito di 50°, e il barometro osservato in pollici inglesi diminuito di 30 pollici.

Tav. XXII.

Qui trovansi i fattori, pei quali moltiplicando la rifrazione *media*, espressa in secondi, si ha la quantità che bisognerà aggiungervi o sottrarvi, secondo il segno dato nella tavola, onde ridurla in rifrazione *assoluta*. L'altezza del Barometro in pollici inglesi, e li gradi del Termometro di Fahrenheit ne sono gli argomenti. Così si ottiene la rifrazione per la temperatura e per il peso che han luogo nell' atmosfera nel momento dell'osservazione, secondo le indicazioni del termometro Fahrenheit, e del barometro inglese. In piè della pagina sono date le regole per tradurre nel barometro inglese li barometri francese e metrico: come anche nel termometro di Fahrenheit li termometri di Reaumur, e Centigrado.

Esempio

Segnando il bar. 29,624, ed il term. 57,3 furono osservate le Distanze dal Zenit di *μ* Colomba e di *p* Nave.

1. *μ Colomba*. Fu messa sotto il filo 26″ prima del passaggio,
e la sua Distanza fu letta 70.26.31,60

Tav. XVII. Riduzione per...... 26″.....0,321 Tav. XVIII. *Fattore* .... 0,71 Riduzione al meridiano.......... 0,71 × 0,321	− 0,23
Tav. XX. Rifrazione Media.....................	+ 2.43,00
Tav. XXII. per il bar. 29,624, ed il ter. 57,3 Fattore—0,029; onde correz.—0,029 × 163″,0	− 4,73
Distanza *vera* dal Zenit	70.29.9,64

2. *p Nave*. Messa sotto il filo 37ᵘ dopo il passaggio, la sua Distanza fu letta............. 83.56.24,50

Tav. XVII. Riduzione per........ 37ᵘ...0,747 / Tav. XVIII. Fattore........ 0,55 / Riduzione al Meridiano......... 0,55 × 0,747	— 0,41
Tav. XX. Rifrazione media................	+ 8.25,53
Tav. XVIII. per il bar. 29,624, ed il ter. 57, 3 Fattore—0,029; onde correz.—0,029 × 505ᵘ,53	— 14,66
Distanza approssimata.........	84.4.34,96
Tav. XXI. .... — 0ᵘ,110 × (57,3 — 50) = — 0,110 × + 7,3..................	— 0,80
Tav. XXI. .... + 0ᵘ,16 × (29ᵖ,624 — 30ᵖ) = + 0ᵘ,16 × — 0,376..................	— 0,60
Distanza *vera* dal Zenit.......	84.4.33,56

Tav. XXIII. — Tav. XXXII.

Le tav. seguenti sino alla XXXII si sono insieme riunite per servire al calcolo delle Distanze dal Zenit del Sole.

La tav. XXIII, di cui è argomento la Distanza osservata dal Zenit, da la Parallasse in altezza del Sole nei diversi tempi dell'anno. Si sottrae dalle Distanze osservate.

Le tav. XXIV e XXV danno la Nutazione dipendente dall'azione della Luna, e del Sole sull'obbliquità dell'ecclitica.

Colla tav. XXVI si calcola l'obbliquità media.

Esempio

Si cerca l'obbliquità *media* ed *apparente* dell'Ecclitica pei 10 aprile 1837 giorno in cui sono la long. dei Sole 0ˢ 20° $\frac{3}{4}$ e long. del Nodo Lunare 1ˢ 2° $\frac{1}{4}$.

Tav. XXVI..... Epoca..... 1830..............	23°.27'.42",09
Decremento annuo per anni 7................	— 3,18
Per giorni 100 = 0,28 di anno = 0,28 × 0,455.	— 0,13
Obbl. *media* ai 10 aprile 1836.....	23. 27. 38,78

Obbl. *media* ai 10 aprile 1837...*prec*...	23.27.38,78
TAV. XXIV. Nutazione Lunare per 1ˢ 2° $\frac{1}{2}$...	+ 7,87
TAV. XXV. Nutazione Solare per 0ˢ 20° $\frac{2}{3}$...	+ 0,33
Obbliquità *apparente*....................	23.27.46,98

TAV. XXVII, XXVIII, XXIX.

Li titoli ne indicano l'oggetto. Riesce commodissimo trovarle riunite e pronte nella stessa pagina. La XXVIII è necessaria all'uso delle tavole seguenti.

TAV. XXX, XXXI, XXXII.

Queste tavole servono per trovare la *latitudine* del Sole per un dato giorno dell' anno. La maniera di servirsene si rende chiara con un'esempio.

Si cerca la *latitudine* del Sole per li 10 aprile 1837.

TAV. XXVIII. 0 aprile, anno comune ... giorni ...		90
10 aprile	+ ...	10
Numero dei giorni dell'anno................................		100

TAV. XXX......argomenti	*A*	*B*	*C*	*D*
Per l'epoca 1820..........	626	198	262	6,7
Moto per 17 anni.........	357	58	376	4,6
Somma.......	983	256	638	11,3
Costanti da sottrarre.....	975		317	
	8	256	321	11,3
Num. da' giorni dell'anno.	100	100	100	100,0
Somme.......	108	356	421	111,3

TAV. XXXI. Latitudine corrispondente alla somma dell'argomento...........	*A*	+ 0″,06
	B	— 0,09
	C	+ 0,22
	D	+ 0,36
	Latitudine del Sole ...	+ 0,55

o sia 0″,55 Boreale.

Tav. XXXII. Ai 10 aprile, cioè per 100 giorni, si ha il fattore — 0,38, il quale moltiplicato per la latitudine + 0,55 darà — 0,21; effetto della latitudine sull'AR. calcolata; dalla quale perciò si deve sottrarre.

Quivi pure per 100 giorni si trova il fattore + 0,93, il quale moltiplicato per la latitudine + 0",55 darà + 0",51, che è l' effetto della latitudine su la declinazione calcolata, e che perciò vi si deve aggiugnere.

Quando la declinazione del Sole è australe si cambia il segno alla latitudine ottenuta colla tav. XXXI prima di moltiplicarla per il fattore della tav. XXXII.

Tav. XXXIII — e seguenti.

Continuo è il bisogno di convertire le posizioni *apparenti* delle stelle, quelle cioè che si osservano con gli stromenti, in posizioni *medie*, cioè in quelle che si trovano nei cataloghi: e continuo ancora il bisogno di convertire le posizioni *medie* dei cataloghi nelle *apparenti*.

1° Generalmente le tavole non solo per le stelle, ma per il Sole, per la Luna, per tutti gli astri, son sempre disposte in modo che applicandone le quantità coi segni algebrici che hanno, le posizioni *medie* si convertono in *apparenti*. Quindi siegue, che per convertire una posizione *osservata* in *media* bisognerà applicarvi le correzioni coi segni contrarj a quelli che si hanno nelle tavole.

2° Per ottenersi la posizione di una stella, se ne osserva nel meridiano il *passaggio* in tempo, e la *distanza dal Zenit*. A parte degli altri errori inerenti al tempo ed alla posizione dallo stromento, le osservazioni si devono correggere degli effetti dell' aberrazione, e della nutazione dell'asse terrestre, le quali alterano le posizioni delle stelle rispetto ai cerchj ai quali si riferiscono.

3° Tav. XXXIII e XXXIV. Non sempre si hanno pronte le Efemeridi per avere la longitudine vera del Sole, che è uno degli argomenti dell'Aberrazione, e della Nutazione dovuta all'azione del Sole; e la longitudine media del Nodo ascendente dell'orbita Lunare, argomento della Nutazione dovuta alla Luna: per tal ragione in queste due tavole abbiamo dato il mezzo di ottenere l'una e l' altra dentro i limiti della precisione che a tal' uopo bisogna. Ecco un'esempio del modo di servirsene.

Si cerchino la long. vera del Sole, e la long. del Nodo per li 10 aprile 1837.

Tav. XXXIII	Lon. m. ☉	Lon. Ap. ☉	Lon. ☊ ☾
	s °	s ° ′	s °
Epoche ... 1800.........	9. 9,87	3. 9,47	1. 3,26
Movim. in 20 anni......	0. 0,15	0,34	11. 3,16
Movim. in 17 anni......	11.29,88.	0,29	1. 1,20
Movim. in 100 giorni....	3. 8,57		11.24,70
		3.10,10	
Somma. Lon. media ☉.	0.18,47		1. 2,32
Lon. Apogeo..	3.10,10		Lon. ☊ ☾
Lon. ☉ —Lon. Apogeo. ovvero Anomalia ☉.	9. 8,37		

Tav. XXXIV. Equazione dell'orbita per 9.8,37... + 1°,18
Longitudine del Sole................ 0.18,47

Longitudine vera del Sole.......... 0.19,65

Onde gli argomenti cercati saranno pei 10 aprile 1837.

Lon. vera del Sole. 0ˢ.19°,65. Lon. media del Nodo ☾. 1ˢ.2°,32

4° La Tav. XXXV da l'effetto dell'aberrazione sull'AR. di ciascuna stella; e le tavole XXXVI e XXXVII sulla declinazione. Presi per argomenti l'AR. approssimata della stella che sempre si conosce, e la longitudine vera del Sole, seguendo li precetti delle tavole, si ottiene l'aberrazione in arco, la quale si applicherà alla posizione media della stella col segno della tavola, ed alle osservazioni col segno contrario a quello che nelle tavole si trova. Dalle tavole avendosi sempre le quantità espresse in secondi di arco, si capisce che bisognerà convertirle in tempo quando si applicano alle AR. in tempo. Questa disposizione è più spedita e meno soggetta ad errori delle altre, nelle quali si è obbligato a preparare gli argomenti con somme e con sottrazioni. Se ne prova la massima speditezza nel calcolo delle lunghe serie di osservazioni. Ho adottato la costante dell'aberrazione 20″,35, ricevuta dalla Società Reale Astronomica di Londra, e appoggiata all'ultime ricerche del Dr Brinkley, e del sig. Struve.

5° Tav. XXXVIII a XLIII. Consimile alle precedenti è la disposizione delle tavole di Nutazione: nelle quali senza bisogno di somme e di sottrazioni per preparare gli argomenti,

si entra immediatamente nelle tavole per mezzo dell'Ascensione Retta della stella, e della longitudine media del Nodo ascendente della Luna per la Nutazione Lunare; e per mezzo dell'Ascensione Retta della stella e della longitudine del Sole per la Nutazione dovuta al Sole. Le due tavole XXIV e XXV avrebbero qui il loro luogo; ma per l'uso a cui giovano si è creduto più utile riunirle alle altre che servono alle osservazioni del Sole. Nel calcolarle non ho creduto dovermi allontanare dal coefficiente dell'obbliquità 9'',35, che mi ha dato la totalità delle mie osservazioni solstiziali, come si può vedere a pag. 146 lib. VIII del vol. 1 del *Reale Osservatorio*. Il celebre astronomo e matematico sig. Carlini nelle sue dotte e profonde ricerche *sulla piccola ineguaglianza del moto della terra* ec., inserite nelle Efemeridi di Milano degli anni 1829, 1830, e 1831, a pag. 61 ha trovata questa mia determinazione perfettamente di accordo col valore della massa lunare da lui definitivamente per vie diverse e con varj metodi stabilita.

6° L'argomento long. ☉, o long. ☊ è disposto nelle colonne esteriori ai lati delle tavole in segni e gradi, di 10° in 10° che ascendono o discendono. Il segno algebrico delle quantità si piglia sulla sinistra o sulla destra delle quantità medesime, secondo che l'argomento che ad esse corrisponde sulla stessa linea orizzontale scorre sulla sinistra o sulla destra della colonna in cui si trova. In fondo delle tavole vi si trovano gli avvertimenti necessarj al totale compimento del calcolo.

Tav. XLIV.

1° Colle tavole precedenti si riduce la posizione della stella dalla *media all'apparente*, e viceversa; ma occorrendo di ridurla ad altro tempo, o al principio dell'anno, vi è bisogno di calcolarne la Precessione annua in Ascensione Retta ed in Declinazione.

2° Si sa che la formola della Precessione in AR. è composta di due termini. Il primo termine, dipendente dalla precessione Lunisolare moltiplicata per il coseno dell'obbliquità dell'ecclittica, diminuito del movimento diretto, che nei punti equinoziali producono le forze perturbatrici de' pianeti, perchè è comune a tutte le stelle, diventa un termine costante. Il secondo vien formato, da un fattore, che moltiplicato per il seno dell'Ascensione Retta si rende variabile, e va moltiplicato

ancora per la tangente della Declinazione. Il primo termine varia anche esso lentissimamente col tardo variare de' suoi elementi; per il 1840 è 46",030, quantità che va crescendo. Il suo aumento in un secolo è di 0",031. Il fattore del secondo termine va diminuendo all'incontro lentissimamente ; e questa diminuzione è in un secolo di $\frac{1}{0,000484}$ del fattore istesso.

3° Presa per argomento della tavola l'AR. della stella si trova in essa il *fattore* del secondo termine moltiplicato per il seno dell'AR. e che bisognerà moltiplicare per la tangente della Declinazione. Per avere la Precessione in AR. per le stelle la di cui AR. è nella prima metà dell'equatore si aggiugne questo secondo termine al primo termine costante se la Declinazione è boreale, e se ne sottrae se la Declinazione è australe : e per le stelle la di cui AR. è nella seconda metà dell'equatore si sottrae esso dal termine costante se la Declinazione è australe, e vi si aggiugne se è boreale.

4° Aggiunti 90° all'AR. della stella si forma l'argomento per la Precessione annua in Declinazione, col quale essa si ottiene direttamente dalla tavola. La Precessione in Declinazione da 0° a 90°, e da 270° a 360° di AR. fa crescere le Declinazioni boreali e fa diminuire le australi; e da 90° a 270 di AR. fa diminuire le Declinazioni boreali e fa aumentare le australi; perchè retrocedendo la sezione di ariete l'equatore lungo il primo e quarto quadrante si allontana dalle stelle boreali, e vi si avvicina lungo il secondo e terzo. Rapportata all'argomento, tra 0° e 180° essa è positiva per le Declinazioni boreali, e negativa per le australi : e tra 180° e 360 dell'argomento medesimo è negativa per le Declinazioni boreali, e positiva per le australi.

5° La disposizione della tavola rende necessaria la sottrazione di 180° dell'argomento una volta; o per la precessione della Declinazione anche due volte se occorre.

Tav. XLV, XLVI, XLVII.

Sono tavole sussidiarie alle precedenti. Vi si trovano li valori naturali della *secante*, del *seno*, e della *tangente* di grado in grado. Nel calcolo del secondo termine della precessione in AR. per causa del cambiamento sempre più rapido delle

tangenti, a misura che si avvicinano a 90°, dalle loro variazioni proporzionali ai gradi della tavola non si può ottenere molta precisione per le declinazioni troppo boreali. Conviene quindi per le stelle vicine al Polo fare uso dei logaritmi.

Tav. XLVIII.

Onde avere la porzione della precessione annua proporzionale ad un dato numero di giorni dell'anno non si ha molta esattezza moltiplicandola per il numero dei giorni diviso per 365. La precessione annua supposta uniforme o media viene alterata di un secondo circa per l'ineguale azione del Sole tra gli equinozj e li solstizj; e dall'aumento di mezzo secondo della obbliquità negli equinozj rispetto ai solstizj. Per tenere conto di tali due ineguaglianze si è disposta questa tavola; nella quale si ha il *fattore*, per cui moltiplicando la precessione annua se ne ottiene la parte proporzionale al giorno dell'anno.

Esempio

1° Ai 10 aprile 1837 il passaggio al meridiano, e la distanza osservata dal Zenit di α Orsa Maggiore, dopo eseguite le dovute correzioni, diedero la seguente posizione apparente di questa stella

AR. apparente.............. $10^h\ 53'.40'',43$
in arco................ $163°.25' = 163°,42$
Declinazione apparente. $62°.37'.55,3\ B = 62°,63$
Long. ☉ ..... $0^s.19°,65$.......Lon. ☊ ☾ ..... $1^s.2°,32$

2° *Aberrazione* .... in AR.

Tav. XXXV..........	+ 14, 83	} .... + 32'',27
secante	2,276	

Aberrazione in Declinazione.

Tav. XXXVI prima parte	+ 11, 54	} ... + 10'',25
seno..........................	0,888	
Tav. XXXVII seconda parte......................		— 3,44
Aberrazione in Declinazione.....................		+ 6,81

3° *Nutazione* .... in AR.

Tav. XXXVIII prima parte......................		— 8″,58
Tav. XXXIX seconda parte ... + 6, 47 *tangente*.......................... 1,933	} ..	+ 12,51
Tav. XLI prima parte..........................		— 0,46
Tav. XLII seconda parte .... — 0, 35 *tangente*...................... 1,933	}	— 0,68
Nutazione in AR..................................		+ 2,79

Nutazione in Declinazione.

Tav. XL..	+ 5,78
Tav. XLIII..	— 0,10
Nutazione in Declinazione.........................	+ 5,68

4° Tav. XLIV. *Precessione annua* .... in AR.

Argomento.......... 163°,42

fattore............................... 5,716 *tangente*............................ 1,933 } ...	+ 11,049
costante	46,030
Precessione annua in AR........................	57,079
in tempo	3,805

Precessione annua in Declinazione.

Argomento. ....253°,42 — 180° = 73°,42

Precessione annua in Declinazione............ — 19″,198

5° Tav. XLVIII. *Fattore* della prec. pei 10 aprile 0,258

Parti proporzionali per ridurre la posizione della stella al principio dell'anno.

Precessione in AR. e in tempo ... 3,805 fattore............................... 0,258 }	+ 0″,962
Precessione in Declinazione .... — 19″,198 fattore........................... 0,258 } ..	— 4″,95

6° Quindi si raccoglie.

Per l'AR....	Aberrazione..........................	+	32",27
	Nutazione............................	+	2,79
	in arco..............................	+	35,06
	in tempo.............................		2,337
Per la Decl.	Aberrazione..........................	+	6,81
	Nutazione............................	+	5,68
		+	12,49

Poicchè si deve convertire la posizione osservata in media si cambiano li segni; e si ottiene.

7° *Dall'osservazione* ... AR. *apparente*		10h.53'.40",43
Aberrazione e nutazione....................	—	2, 33
8° Ascensione Retta *media* ai 10 aprile.....		10. 53. 38, 10
Precessione proporzionale.	—	0, 96
9° Ascensione Retta *media* al 1 genn. 1837.		10. 53. 37, 14
Precessione per 3 anni....................	+	11, 42
10° Ascensione Retta *media* pel 1840.......		10h.53'.48",56
AR. in arco................................		163°.27'. 8", 4

11° Declinazione *apparente*..................		62°.37'.55",3 *B*
Aberrazione e Nutazione....................	—	12,5
12° Declinazione *media* ai 10 aprile........		62. 37. 42,8
Precessione proporzionale..................	+	5,0
13° Declinazione *media* al 1 gennaro 1837.		62. 37. 47,8
Precessione per 3 anni....................	—	57,6
14° Declinazione media pel 1840..........		62°.36'.50",2 *B*